Ленчук І.Г.[1]

Конструктивно-генетичний метод у задачах «на перерізи»

[1] *Ленчук Іван Григорович, кандидат технічних наук, професор, Житомирський державний університет імені І. Франка, м. Житомир, Україна*

Анотація. Донині у студентській аудиторії не акцентується значимість інноваційних педагогічних технологій науково обґрунтованого оволодіння дисципліною «Геометрія» на основі конструктивного підходу. Це не сприяє професійному і особистісному становленню майбутнього вчителя. У статті прикладами реальних позиційних і метричних задач «на перетин тіл площиною» детально продемонстровано графічні і графоаналітичні можливості конструктивно-генетичного методу їх розв'язання (в сукупності з обчислювальним методом). У деталях розкрито стержневі питання задавання і, з метою реалізації навичок звичного мислення по ходу розв'язання задачі, вдалого перезадавання на проекційному рисунку січної площини. Тема має серйозне продовження у вивченні способів застосування графічних і графоаналітичних методів стосовно до задач метричного характеру.

Ключові слова: модель, січна площина, фігура перерізу, перезадавання, графічний (графоаналітичний) метод, внутрішнє проекціювання.

Актуальність проблеми. Роль професійно навченого педагога-***геометра*** у стимулюванні пізнавальних інтересів, інтелектуального розвитку та збагачення задатків творчого мислення проявляється через популяризацію, активне залучення в навчальний процес новітніх освітянських технологій, прогресивних методів і засобів наукового пізнання. Викладаючи геометрію, справжній фахівець спроможний дохідливо передати тому хто вчиться відчуття гармонії геометричного матеріалу, візуально, в наочній формі продемонструвати його природну красу і одвічно прикладне спрямування. Він уміло перекладає абстрактні результати логічних умовиводів на мову уявлюваних графічних образів, які повертають до реальності, що досліджується. Це додає віри у природну істинність та практичну придатність першонауки.
Якісне розв'язування задач на обчислення, з використанням ізоморфної даному тривимірному об'єкту бінарної моделі, нерідко вмішує побудову перерізу, що є проміжним етапом в унаочненні логіки міркувань. У розділі «Стереометрія» – це найперша, стрижнева позиційна задача конструктивного характеру.

Ретельний аналіз вірного й наочного креслення до задачі забезпечує уявлюване бачення взаємного розташування заданих тіла і площини, вдалий вибір методу зримих рисункових дій, установлення форми й розмірів фігури перерізу. Негаразди з'являються тоді, коли площина задається незвичними, особливими умовами, відмінними від традиційних. Як-от, січна площина може проходити через: 1) дану точку паралельно певній площині; 2) дану точку паралельно двом заданим мимобіжним або таким, що перетинаються, прямим; 3) одну із двох даних мимобіжних прямих паралельно іншій із них; 4) дану точку перпендикулярно до даної прямої; 5) дану пряму перпендикулярно до даної площини; 6) дану точку перпендикулярно до даної площини і паралельно даній прямій; 7) дану пряму під даним кутом до даної площини тощо. В чіткому обґрунтуванні алгоритму побудови фігури перерізу, з'ясуванні її істинних параметрів в кожному з цих випадків потрібно посилатися до відповідних означень, аксіом, а також теорем на паралельність і перпендикулярність прямих та площин. Часто, розв'язуючи задачу в конкретному варіанті умови, особі без досвіду важко зорієнтуватися у відшуканні правила-орієнтиру покрокових операцій.

Метою нашого дослідження є: прикладами задач із суто геометричним змістом продемонструвати візуальний **конструктивізм у дії**, вирізнити «початки» стереометрії та, між іншим, з'ясувати фахові нюанси грамотного перезадавання «незручно» введеної січної площини одним із часто вживаних, класичних способів. Зазвичай остання задається *трикутником* або *парою паралельних* чи таких, що *перетинаються*, прямих.

Виклад основного матеріалу.

Задача 1. *Побудувати переріз правильної чотирикутної призми* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *площиною, яка проходить через точку* M *на бічному ребрі* BB_1 *паралельно діагоналі основи* AC *і мимобіжній із нею діагоналі призми* BD_1.

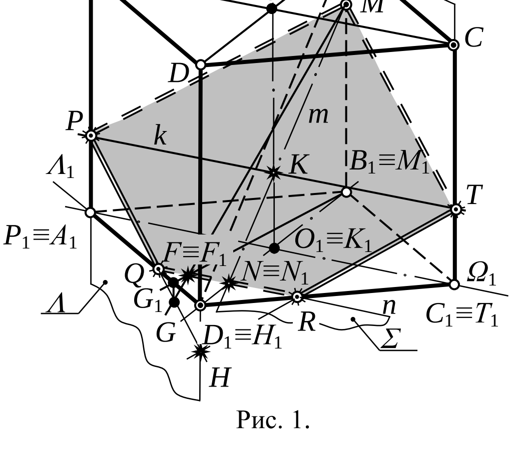

Рис. 1.

Посилаючись на ознаку паралельності прямої і площини, стверджуємо, що визначена умовою задачі січна площина $\boldsymbol{\Sigma}$ (рис. 1) мала б бути перезадана на проекційному рисунку двома прямими m і n, які перетинаються. При тому одну із цих прямих, нехай нею буде, приміром, пряма m, розташовуємо у просторі паралельно діагоналі призми BD_1, а іншу n – паралельно діагоналі її верхньої (нижньої) грані $AC(A_1C_1)$. Отже, проведемо в діагональному перерізі призми BB_1D_1D через точку M пряму m, паралельну BD_1, і відмітимо точку $N \equiv N_1$ (слід) перетину останньої з B_1D_1; через точку $N \equiv N_1$ у площині нижньої основи призми проведемо пряму n, паралельну A_1C_1.

Очевидно, що пряма n є слідом площини $\boldsymbol{\Sigma}$ $(m \cap n)$ на площині основи $\boldsymbol{\Pi}(A_1B_1C_1D_1)$, а точки Q і R її перетину з ребрами A_1D_1 і D_1C_1 – двійкою вершин багатокутника перерізу. Оскільки точка M на ребрі BB_1 відома, залишається тільки відшукати на зображенні точки P і T перетину ребер AA_1 і CC_1 із площиною $\boldsymbol{\Sigma}$. З тим, щоб шлях побудов був якомога коротким, скористаємося у **внутрішньому проекціюванні** площиною-посередником $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega}_1)$, яка вміщує обидва ребра AA_1 і CC_1 та, власне, й задається ними. Пряма $MN(M_1N_1)$ площини $\boldsymbol{\Sigma}$ перетинає площину $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega}_1)$ у точці $K(K_1 \equiv O_1)$, а пряма k $(k_1 \equiv A_1C_1)$, яка проходить через точку K паралельно QR, є лінією перетину площин $\boldsymbol{\Sigma}$ і $\boldsymbol{\Omega}$, тому належить площині $\boldsymbol{\Sigma}$ і висікає на ребрах AA_1 та CC_1 останні дві вершини P і T шуканого багатокутника перерізу $MPQRT$.

Привертаємо увагу до того факту, що наведені зараз міркування більше притаманні **методу ребер**, адже свідомо ввівши в розгляд проекціювальну площину-посередник $\boldsymbol{\Omega}$ $(AA_1 \| CC_1;\ A_1C_1 \equiv \boldsymbol{\Omega}_1)$, ми скористалися першою основною позиційною задачею стосовно вказаних ребер призми. Так само успішно можна було б розпочати побудову з відшукання лінії перетину січної площини $\boldsymbol{\Sigma}$ і, скажімо, грані AA_1D_1D (чи DD_1C_1C), яка вже має з $\boldsymbol{\Sigma}$ одну спільну точку $Q \equiv Q_1$ $(R \equiv R_1)$ за побудовою. Оскільки площина $\boldsymbol{\Lambda}(AA_1D_1D)$ – проекціювальна $(\boldsymbol{\Lambda}_1 \equiv A_1D_1)$, то для відшукання ще однієї точки $G(G_1)$, що належить площинам $\boldsymbol{\Sigma}$ і $\boldsymbol{\Lambda}$ одночасно, зручно у площині $\boldsymbol{\Sigma}$ рисунково вдало обрати деяку пряму, наприклад $MF(M_1F_1)$, де $F(F_1) \in QR(Q_1R_1)$, і побудувати її перетин із проекціювальною площиною $\boldsymbol{\Lambda}$. Пряма QG на прямих AA_1 і DD_1 висіче відповідно дві точки $P(P_1 \equiv A_1)$ і $H(H_1 \equiv D_1)$, що й призведе, врешті-решт, до остаточної побудови багатокутника перерізу $MPQRT$.

Очевидно, що такий хід міркувань у розв'язанні задачі властивий **методу граней**, адже побудова лінії перетину площини лівої грані паралелепіпеда з січною площиною цілком позиційно визначає на кресленні шуканий багатокутник перерізу $MPQRT$. Той факт, що задача на перетин двох площин $\boldsymbol{\Sigma}$ і $\boldsymbol{\Lambda}$ включає в себе задачу на перетин прямої $MF(M_1F_1)$ із площиною $\boldsymbol{\Lambda}$ є природним явищем.

Окремо зауважимо, цю розв'язану щойно задачу можна легко переформулювати в задачу на обчислення (наприклад, площі фігури перерізу), додавши такі метричні параметри: ребро в основі призми рівне a, бічне ребро – $1{,}5a$, а $BM : MB_1 = 1 : 4$.

Задача 2. *Дано чотирикутну піраміду SABCD. Потрібно через точку К на ребрі SA провести переріз піраміди, який мав би форму паралелограма.*

Січну площину в даній задачі на інциденцію задано особливим способом: точкою K на ребрі SA вже накресленого багатогранника та первісно встановленою формою шуканої фігури перерізу, однією з вершин якої й є точка K.

Нехай рисунок 2 задовольняє умову задачі: чотирикутник $KLMN$ є перерізом піраміди , в якому, за означенням паралелограма, протилежні сторони попарно паралельні: $KL \| NM$ і $KN \| LM$. Узагальнюючи, розглянемо спочатку варіант зображення піраміди, коли її основа $\boldsymbol{\Pi}(ABCD)$ віднесена необмежено вниз, а отже, вершини паралелограма є точками бічних ребер. Тут, що очевидно, протилежні сторони фігури перерізу $KLMN$ належатимуть несуміжним бічним граням SAB і SCD, SBC і SDA, відповідно. Отже, січна площина висікатиме на несуміжних бічних гранях відрізки паралельних прямих. На запитання «за яких умов пару площин, що перетинаються, третя площина перетинає вздовж паралельних прямих?» можна дати єдино правильну відповідь – тоді, коли третя (січна) площина паралельна прямій перетину двох інших (заданих) площин.

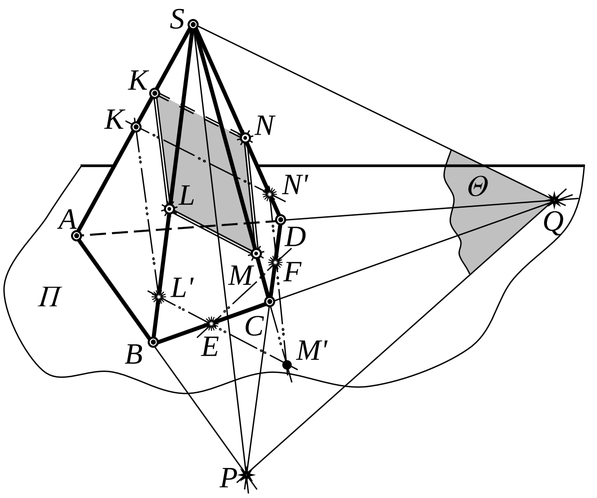

Рис. 2.

Цими останніми міркуваннями етап *аналізу* задачі можна вважати завершеним і в ситуації, що склалася, наступний етап – *побудову* чотирикутника *KLMN* замовленої форми – визнати майже очевидним.

1. Прямі *SP* і *SQ* перетину площин двох пар несуміжних граней $\boldsymbol{\Sigma}(SAB)$ і $\boldsymbol{\Lambda}(SCD)$, $\boldsymbol{\Delta}(SBC)$ і $\boldsymbol{\Omega}(SAD)$ визначені на рисунку точкою *S* та точками *Q* і *P* перетину їх слід-проекцій, відповідно. Тепер, що безсумнівно, площина перерізу має більш зрозуміле позиційне розміщення у просторі – вона містить точку *К* і паралельна площині $\boldsymbol{\Theta}$ трикутника *SPQ*.

2. Через задану точку *К* проведемо пряму *KL*, паралельну *SP*, і пряму *KN*, паралельну *SQ*. Доречно нагадаємо, що пряма проведена через точку площини паралельно прямій цієї ж площини, теж належить заданій площині. Тому точки *L* на ребрі *SB* і *N* на ребрі *SD* – реальні, а трійка точок *К*, *L* і *N* однозначно визначатимуть на кресленні цю ж площину перерізу $\boldsymbol{\Gamma}(KLN)$.

3. Наприклад, через точку *N* проведемо пряму *NM*, паралельну *SP*, і з'єднаємо точки *L* та *M*. Стверджуємо, що чотирикутник *KLMN* – шуканий паралелограм.

Оскільки, за транзитивністю паралельних прямих, $KL \parallel NM$ ($KL \parallel SP$ і $NM \parallel SP$), то залишається *довести*, що $KN \parallel LM$. Зробимо це методом від супротивного. Припустимо, що прямі *KN* і *LM*, які належать площині перерізу $\boldsymbol{\Gamma}(KLN)$, перетинаються в точці *X*. Але ж $KN \subset \boldsymbol{\Delta}(SAD)$ і $LM \subset \boldsymbol{\Omega}(SBC)$, а *SQ* є прямою перетину цих площин, тому *KN* і *LM* перетинаються в точці *X* прямої *SQ*, а це суперечність, оскільки $KN \parallel SQ$ за побудовою.

Заключний (третій) крок побудови можна було б подати ще й так: через точку *N* провести пряму, паралельну *SP*, а через точку *L* – пряму, паралельну *SQ*, до їх перетину з ребром *SC* відповідно у точках *M і M'*. Далі просто довести, що точки *M* і *M'* на ребрі *SC* зливаються (вони обидві належать площині $\boldsymbol{\Gamma}(KLN)$ і ребру *SC*).

Стосовно завершального етапу задачі на побудову, який ми називаємо *дослідженням*, тут слід відзначити лише одне: форма фігури перерізу заданого на кресленні п'ятигранника *SABCD* (див. рис.) площиною, паралельною площині $\boldsymbol{\Theta}(SPQ)$, залежить виключно від місця розташування точки *К* на ребрі *SA*. Якщо слід площини перерізу $\boldsymbol{\Gamma}(KLN)$ матиме дві спільні точки (*E* і *F*) із чотирикутником *ABCD* в основі піраміди, то *KLEFN* буде 5-кутником, дві пари несуміжних сторін якого паралельні (див. рис., виконаний штрих-пунктирною лінією із двома крапками), і паралелограмом лише за обставин, коли *ABCD* – трапеція.

Задача 3. *Правильна трикутна піраміда, бічне ребро якої в півтора рази більше ребра основи, перетнута площиною. Фігурою перерізу є квадрат. Знайдіть відношення об'ємів багатогранників, на які розбиває піраміду переріз.*

Зараз, як має бути завжди у схожих ситуаціях, схема пошуку розв'язання задачі строго розчленовуються на два етапи – ***графічний*** і ***обчислювальний***. Від того, наскільки ефективно, вдало, якісно (правильно і наочно) впораємося з першим етапом, залежить виразність міркувань і певність успіху в кінцевих випробуваннях.

Спочатку, за звичних шкільних обставин, обов'язково потрібно було б грамотно провести ***аналіз*** задачі через такі, приміром, розмірковування. Осмислюючи умову, констатуємо, правильна трикутна піраміда перетинається неявно заданою площиною $\boldsymbol{\Sigma}$, а фігурою перерізу є квадрат (рис. 3). Оскільки піраміда має чотири грані, а квадрат – чотири сторони, то площина $\boldsymbol{\Sigma}$ напевне перетинає кожну грань і результатом цього дійства є замкнена плоска ламана, складена із чотирьох взаємно перпендикулярних відрізків однієї і тієї ж довжини в їх ланцюжковому переліку й зв'язку. Розглянемо на допоміжному рисунку, виконаному нашвидку «від руки», дві будь-які грані піраміди. Нехай, для визначеності, ними будуть грані *SAB* і *ABC*. Припустимо, що саме вони містять у собі одну пару (*KL* і *MN*) протилежних сторін квадрата *KLMN*. Зрозуміло, що в такій ситуації $\boldsymbol{\Sigma}$ паралельна ребру *AB*, яке є спільним (ребром перетину) для вибраних граней. Отже, *KL* || *AB* і *MN* || *AB* (див. задачу 2). Аналогічно, дві інші грані (*SAC* і *SBC*) площина перерізу перетинає паралельно їх спільному ребру *SC* і, в результаті, *LM* || *SC* і *KN* || *SC*.

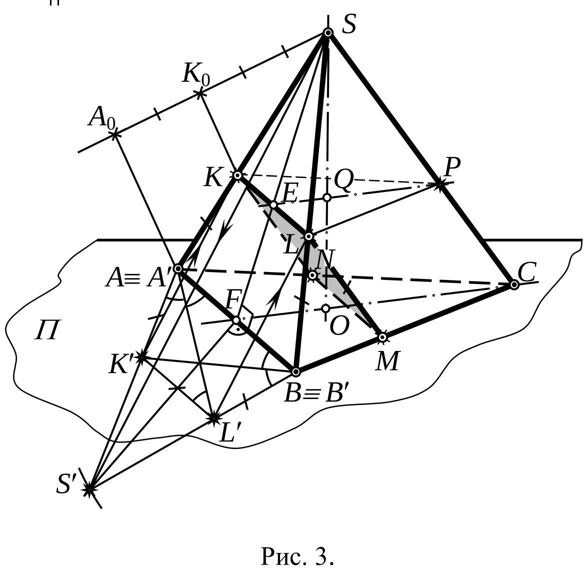

Рис. 3.

У послідовності рисункових операцій, по суті справи, вчитель на дошці (чи учень у зошиті) зображає на *кресленні-картині фігуру перерізу* піраміди орієнтовно за таким сценарієм: 1). Вибираємо на *SA* ***довільну*** (!) точку *K* і проводимо через неї пряму, паралельну *AB*, до перетину з ребром *SB* у точці *L*. 2). Через точки *K* і *L* проводимо прямі, паралельні *SC*, і фіксуємо їх точки *N* і *M* перетину з ребрами *AC* і *BC*, відповідно. 3). З'єднуємо точки *M* і *N* у грані *ABC* відрізком прямої. Уявляємо собі, що *KLMN* – шуканий квадрат, який зображується паралелограмом, і розпочинаємо виконання зумовлених обчислень.

Це загальноприйнята, звична схема в роботі із проекційним кресленням на уроці стереометрії. Все ж таки, мислячий учень може висловити сумнів, невдоволення побудовним етапом якраз у такому вигляді, оскільки ***точка К на самому початку вибиралася на ребрі SA будь-де,*** що природно дезорієнтує його у вирішенні питання **однозначності** перерізу піраміди визначеною площиною $\boldsymbol{\Sigma}$. Тому, враховуючи метричні властивості повного зображення і скориставшись циркулем та лінійкою, можемо *методом суміщення* строго зафіксувати важливу, єдину точку *K*, а отже, з точністю до побудови, й квадрат $KLMN$. Так одержані проекційні рисунки забезпечують безкомпромісність у пошуку та сприйнятті розумом істинного розв'язку, підкреслюючи абсолютну строгість задіяних геометричних закономірностей і фактів.

Перш ніж візуально реалізувати задумане, сумістивши грань *S'A'B'* із площиною зображень, потрібно ще раз чітко проаналізувати креслення-картину, осмислити певні визначальні в майбутній рисунковій роботі співвідношення. А саме, *L'M'* || *S'C'* (за побудовою), а трикутник *B'L'M'* – рівнобедрений:

$$\angle S'C'B' = \angle L'B'M' = \angle L'M'B'.$$

Тому *B'L'* = *L'K'* = *L'M'* (аналогічно маємо: *A'K* = *K'N'* = *K'L'*). Отже, чотирикутник *A'K'L'B'* є трапецією із трьома рівними сторонами:

A'K'=*K'L'*=*L'B'*.

Очевидно, що суміщення точки *S'* просто шукаємо в перетині променя-перпендикуляра *FS'* до *A'B'* та кола, з центром у точці *B'* і радіусом у півтора рази більшим відрізка *A'B'* ≡ *AB*. Точку *K'*, що задовольняє щойно встановленому факту (*A'K'L'B'* – особлива трапеція), будуємо в перетині бісектриси кута *A'B'S'* із відрізком *A'S'* ($\angle A'B'K' = \angle B'K'L'$; $\angle B'A'L' = \angle A'L'K'$, як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих *A'B'* і *K'L'*). Далі, проводимо *K'K* || *S'S*, що й визначає на ребрі *SA* єдину шукану точку *K* (етапи *побудови* та *доведення* строго не розмежовуються).

Щоб розв'язати цю ж саму задачу ***графоаналітичним*** методом, розрахуємо розташування точки *K* на відрізку *SA*. Позначимо, для зручності, сторону квадрата через *x*, а сторону основи піраміди покладемо рівною 1 (одиниці). Тоді $S'A' = \frac{3}{2}$. Трикутники *S'A'B'* і *S'K'L'* подібні, що очевидно, а $\frac{A'B'}{K'L'} = \frac{S'A'}{S'K'}$. Але *S'K'* = *S'A'*– *K'A'*. Тож маємо:

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - x} \Rightarrow A'K' = x = \frac{3}{5}.$$

Далі, $S'K' = \frac{9}{10}$, а *S'K'* : *K'A'*=*SK* : *KA*=3 : 2. Тепер побудова точки *K* на *SA* виконується звичним прийомом (див. рис.).

Таким чином, *побудовний* етап завершено. Виконаємо формальні обчислення.

Отож, згідно з висновком задачі, потрібно знайти відношення об'ємів двох багатогранників, у яких спільною гранню є квадрат *KLMN*. Для компактності наступних записів введемо позначення: $V_{SABC} = V$; $V_{AKNBLM} = V_1$; $V_{SKLNMC} = V_2$. З метою безпосереднього використання вже відомих із шкільного курсу геометрії формул об'ємів багатогранників, останній із них (*SKLNMC*) розіб'ємо площиною, паралельною площині основи піраміди (*ABC*), на два стандартні багатогранники – правильну трикутну піраміду *SKLP* і похилу призму *KLPNMC*, які мають спільну основу *KLP*. Нехай також $V_{SKLP} = V_3$ і $V_{KLPNMC} = V_4$. Очевидно, що

$$V_1 = V - V_2, \text{ а } V_2 = V_3 + V_4 \qquad (1)$$

Отже, визначальними на шляху до результату є три об'єми: V, V_3 і V_4.

Далі, взявши до уваги умову задачі та пам'ятаючи, що $AB=1$, $SA=\frac{3}{2}$ і $KL=\frac{3}{5}$, запишемо спочатку вирази для цих трьох об'ємів нами ж установлених стереометричних фігур:

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO \\ V_3 &= \tfrac{1}{3} S_{KLP} \cdot SQ, \\ V_4 &= S_{KLP} \cdot QO \end{aligned} \qquad (2)$$

а потім обчислимо їх. До решти записів і перетворень, виконаних нижче, коментарі зайві, оскільки їх зміст добре зрозумілий із вірного й наочного рисунка.

Дійсно: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}$ і

$S_{KLP} = \frac{1}{2} KL \cdot LP \cdot \sin 60° = \frac{9\sqrt{3}}{100}$, адже $KL = LP = \frac{2}{5} SA = \frac{3}{5}$. У продовження, із прямокутного трикутника *SOC*, матимемо:

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{3}},$$

де $OC = \frac{2}{3} FC = \frac{2}{3}\sqrt{BC^2 - (\frac{1}{2} AB)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Крім цього, $\Delta ASB \sim \Delta KSL$ і $\Delta FSO \sim \Delta ESQ$, тому $\frac{AB}{KL} = \frac{FS}{ES} = \frac{OS}{SQ}$ і

$$1 : \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{3}} : SQ \Rightarrow SQ = \frac{3\sqrt{23}}{10\sqrt{3}},$$

а $QO = SO - SQ = \frac{\sqrt{23}}{5\sqrt{3}}$.

Нарешті, щоб завершити формалізовані пошуки відповіді, оберненим ходом за формулами (1) і (2) підраховуємо:

$V = \frac{\sqrt{23}}{24}$, $V_3 = \frac{9\sqrt{23}}{1000}$, $V_4 = \frac{9\sqrt{23}}{500}$, а отже: $V_2 = \frac{27\sqrt{23}}{1000}$, $V_1 = \frac{11\sqrt{23}}{750}$ і $V_1 : V_2 = 44 : 81$.

Задачу розв'язано.

Привертаємо увагу до сформованого ланцюжка обчислень, в якому виразно простежується структурована системна лінія – *аналітичний метод* пошуку розв'язку за принципом «від висновку до умови», що кожен учитель математики зобов'язаний вміти робити якісно та ще й, обов'язково, на належному науково-методичному рівні. Більше того, цьому прийому потрібно настирно навчати студентів і учнів ЗОНЗ.

Отже, в одній задачі було реалізовано ***два*** *методично різні* підходи до її висновку. Точку *К* на ребрі *SA* можна вибирати будь-де, тоді рисунком буде **креслення-картина**, як допоміжний засіб у пошуку обчислювального результату. Проте обґрунтована побудова цієї точки (графічно чи графоаналітично), а за нею й перерізу піраміди, не виключаючи обчислювальну складову, помітно «***додає геометрії***», однозначності мислення, ***певності*** *уявлюваної конструкції* та ***строгості*** *використання геометричних понять і фактів*. В останньому випадку ***стимулятором*** **діяльнісного *научання*** того, хто *розв'язує задачу*, є **креслення-модель**.

Задача 4. *Основою піраміди SABCD є ромб ABCD, в якому AC = a, BD = b. Бічне ребро SA перпендикулярне площині основи. Через точку A і середину ребра SC проведено площину, паралельну діагоналі BD. Знайти площу фігури перерізу, якщо* $SA : AC = 2\sqrt{2} : 1$.

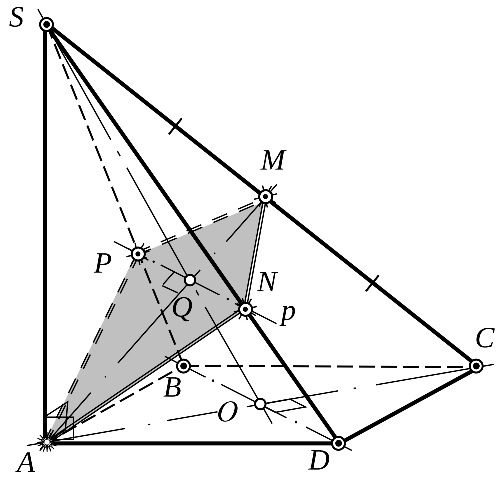

Рис. 4.

Нехай *SABCD* – задана піраміда (рис. 4). Площина перерізу Σ визначається двома точками та певним розташуванням відносно прямої *BD*. Якщо *M* – середина ребра *SC*, то *AM* – медіана трикутника *SAC*. Ще одна його медіана *SO* – відрізок, спільний для діагональних перерізів піраміди *SAC* і *SBD*, – перетинає *AM* у точці *Q* і, за відомою властивістю медіан, $SQ = \frac{2}{3} SO$. Проведемо через точку *Q* пряму *p*, паралельну *BD*, чим **перезадамо** січну площину $\Sigma(p \cap AM)$ двома прямими, які перетинаються. Очевидно, пряма *p* належить площині (*SBD*) і перетинає ребра піраміди *SB* і *SD* відповідно в точках *P* і *N*, які разом із точками *A* і *M* будуть вершинами чотирикутника перерізу *APMN*. Зараз переріз побудовано спираючись на умову задачі, певні геометричні факти та переконливу логіку міркувань.

Далі помічаємо, що $AM \perp PN$ (спрацьовує обернена теорема про проекціювання прямого кута: $PN \parallel BD$, *AO* – проекція *AM* на площину основи піраміди), *MO* – середня лінія трикутника *SAC*, а $\Delta SPN \sim \Delta SBD$. Але ж $AO = \frac{a}{2}$ і $SA = 2\sqrt{2}a$.

Тому, по-перше, $MO = \frac{1}{2} SA = \sqrt{2}\, a$, а $AM = \sqrt{AO^2 + MO^2} = \frac{3}{2} a$ (цього ж результату дійдемо врахувавши, що у прямокутному трикутнику *SAC* $AM = \frac{1}{2} SC$). І, по-друге,

$\frac{PN}{BD}=\frac{SQ}{SO}\Rightarrow PN=\frac{BD\cdot SQ}{SO}=\frac{2}{3}b$. Остаточно маємо: $S=\frac{1}{2}AM\cdot PN=\frac{ab}{2}$.

Алгоритмічна схема

$$S=\frac{1}{2}AM\cdot PN\leftrightarrow\begin{cases}AM=\sqrt{AO^2+MO^2}\leftrightarrow\begin{cases}AO=\dfrac{AC}{2}\leftrightarrow AC=a,\\ MO=\dfrac{SA}{2}\leftrightarrow SA=2\sqrt{2}AC\leftrightarrow AC=a;\end{cases}\\ \\ PN=\dfrac{BD\cdot SQ}{SO}\ (\Delta SPN\infty\Delta SBD)\leftrightarrow\begin{cases}BD=b,\\ SQ=\dfrac{2}{3}SO\ (Q=SO\bigcap AM).\end{cases}\end{cases}$$

Висновки. У схожих пропозиціях елементарної евклідової геометрії, зі змістовно наповненими завданнями та візуально унаочненими уявлювано-динамічними прийомами їх покрокового вирішення в закономірних інтерпретаціях, **діяльнісне моделювання** стає творчим, передбачено рекламаційним, й це пробуджує мислення, розпалює інтерес до диво-науки. Успіх педагога у пізнанні дисципліни «**Геометрія**», компетентність, професіоналізм досягається не стільки числом, скільки вмінням, глибиною, якістю власноруч вирішених питань і, перш за все, їх грамотною **постановкою**, зумисним орієнтуванням на прикладну значимість та життєву доцільність.

Конструктивно-генетичний метод найбільш зримо втілюється у практику научання в задачах, інтенсивне розв'язування яких є обов'язковим, незамінним компонентом діяльності. Завдяки задачам відбувається усвідомлення геометричної дійсності. Задачі змушують оперувати фактами, до діла вилученими на кожному кроці з пам'яті особистості, дають вирішальний поштовх у розумінні, «баченні» зумовлених просторових залежностей. На моделі начебто в оригіналі відпрацьовуються стереотипи пошуку результату. Всякий, хто плідно «працює в геометрії», в більшій мірі через задачі набираємося досвіду, задатків дослідницького наочно-образного і логічного мислення, пізнає тонкощі першонауки.

Ми певні, поліпшити зацікавленість геометрією, умовно кажучи, щоразу заохочувати суб'єкта освітнього процесу використовувати її методи і закономірності, активізувати природні здібності, додаючи навичок творчості, можна винятково сміливим переорієнтуванням пріоритетів у навчанні – з обчислювальних стандартизованих прийомів і способів – на побудовні, методологічно нетипові, але більш варіативні, які характеризуються суто геометричним тлумаченням, уявленням і рисунковим супроводом. Лише такі підходи, за змістом і формою подання фактів та у плані їх візуального наочно-образного сприйняття, всеохоплююче висвітлюють внутрішні природні зв'язки між елементами різноманітних стереометричних конфігурацій, сприяють ефективному розвитку інтелектуальних якостей особистості, удосконалюють фахові вміння й навички, тренують розум розмаїтістю умоглядних логічних схем.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ленчук І.Г. Конструктивна стереометрія в задачах: Навч. посібник монографічного характеру для студентів математичних спеціальностей ВПНЗ / І.Г. Ленчук. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 368 с.
2. Погорєлов О.В. Геометрія: Стереометрія: Підручник для 10-11 кл. середньої школи – 4-те вид. – / О.В. Погорєлов. – К.: Освіта, 1998. – 128 с.

Lenchuk I.G. Structurally-genetic method in tasks «on crossing»

Abstract. Today's teachers don't reveal to the students the importance of innovative pedagogical techniques for mastering the discipline of constructive science-based «Geometry» approach. This is not conducive to the professional and personal formation of future teachers. An article particularly shows graphic and graphic-analytical capabilities of constructive-genetic method based on the examples of positional and metric problems «on the intersection» and their solutions (conjunctive with a computing method). For the purposes of realization of general skills through the course of the problem solving, core issues of successful definition and redefinition cutting plane in the figure are disclosed in details. There is no need for digging into the nature of structural-genetic method, one would ponder. However, two types of structures are differentiated as operating strictly according to the rules of stereometric figures of the parallel projection: positional and metric. In the higher education institutions they were not determined with proper attention. At the same time, the spatial problem of the calculation is effectively solved only on an image with a certain position. Tasks that require the visual setting of

the relative position and fixation of geometric shapes incidence are, called positional (affine). The theorem on the line, which is owned by the plane has substantial component of the third paragraph of § 1 of the textbook O.V. Pogorelov for High School «Geometry: Stereometry» with a meaningful title «Crossing the line with the plane», only includes a theorem of straight plane accessories. The evidence is concluded: «From Theorem 1.2 it follows that the plane and the line, which does not include it, either do not overlap, or intersect at one point». The logic of a creative person would follow: «Does the name of the item correspond to its contents?», «Why was not the essence of the question portrayed in image?». A pedagogical professional would be able to provide answers to the incompleteness in the presentation of important facts, as «read between the lines». We suggest to start learning stereometry from the 1-st and 2-nd major positional problems, and their visual presentation and with further application of the common problems in the calculation. Extra attention needs to played to the essentials of stereometry while training the future teachers. Studying ways to use graphic and graphic-analytical methods regarding the nature of the tasks of the metric is one possible way to continue the study of the problem.
Keywords: internal projection, model, cutting plane, a figure crossing, redefinition, graphic (graphic-analytical) method

Ленчук И.Г. Конструктивно-генетический метод в задачах «на пересечения»

Аннотация. Поныне студентам не акцентируют значимость инновационных педагогических технологий научно обоснованного овладения дисциплиной «Геометрия» на основании конструктивного подхода. Это не способствует профессиональному и личностному становлению будущего учителя. В статье примерами позиционных и метрических задач «на пересечение» подробно продемонстрировано графические и графоаналитические возможности конструктивно-генетического метода их решения (в совокупности с вычислительным методом). С целью реализации навыков привычного мышления по ходу решения задачи, в деталях раскрыто стержневые вопросы задавания и удачного перезадавания на рисунке секущей плоскости. Казалось бы, к чему углубляться в природу конструктивно-генетического метода? Различают два вида построений, выполняемых строго по правилам параллельного проецирования стереометрических фигур: позиционные и метрические. В ВПУЗ им пока нет должного внимания. В то же время, эффективно решать задачу на вычисление можно только на позиционно определённом изображении. Задачи, в которых требуется визуально установить взаимное расположение и зафиксировать инциденции геометрических фигур, называют позиционными (аффинными). Содержательной составляющей третьего пункта § 1 учебника О.В. Погорелова для ООШ «Геометрия: Стереометрия», со значимым названием «Пересечение прямой с плоскостью», есть только теорема о принадлежности прямой плоскости. После её доказательства сделано вывод (цитата): «Из теоремы 1.2 вытекает, что плоскость и прямая, не лежащая на ней, либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке». Творчески мыслящая личность задумывается: «Соответствует ли название пункта его содержанию?»; «Почему не реализовано сущность вопроса на рисунке?». Педагог профессионал сумел бы дать ответы, «прочитать между строк» недосказанность в изложении важных фактов. Мы предлагаем начинать изучение стереометрии с 1-й и 2-й основных позиционных задач, их наглядного представления и применения в обычных задачах на вычисление. Им нужно уделить особое внимание в истоках обучения стереометрии будущих учителей. Тема имеет серьёзное продолжение в изучении способов применения графических и графоаналитических методов касательно задач метрического характера.

Ключевые слова: внутреннее проецирование, модель, секущая плоскость, фигура пересечения, перезадание, графический (графоаналитический) метод.