Кугай Н.В., Борисов Є.М.

Методологічні аспекти математичного моделювання

Кугай Наталія Василівна, кандидат педагогічних наук, докторант
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, м. Київ, Україна
Борисов Євген Миколайович, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Глухівський національний педагогічний університет імені О. Довженка, м. Глухів, Україна

Анотація. У статті проаналізовано різні тлумачення поняття "модель". З'ясовано найпоширенішу класифікацію моделей. Виокремлено основні властивості моделей та етапи математичного моделювання. Розглянуто деякі основні, відомі математичні моделі, які широко використовуються в різних галузях науки.

Ключові слова*: методологія, модель, метод математичного моделювання*

Вступ. Практично все своє життя людина має справу з моделями – чи то модель автомобіля у вигляді дитячої іграшки, чи модель Земної кулі у вигляді глобуса. Під час навчання у школі, починаючи з наймолодшого віку, діти починають вивчати, пізнавати, досліджувати навколишній світ. Особливу роль у цьому без сумніву відіграють різноманітні моделі, які дають можливість не тільки дослідити, зрозуміти те чи інше явище, а й розвинути вміння аналізувати, створювати нове, абстрактно мислити, що є необхідною основою для подальшого становлення та розвитку людини як особистості.

Модель є одним із центральних і складних понять теорії пізнання, оскільки воно опирається на філософські поняття: відображення, істина, подібність, відмінність, правдоподібність, аналогія тощо. Поняття моделі відіграє в методології будь-якої науки значну роль. У дослідженнях Ю.А. Коварського, Ю.А. Кусого, В.Ф. Паламарчук, В.В. Попковича, Н.М. Розенберга, М.А. Солодухіна, І.І. Блехмана, А.Д. Мишкіса, Я.Г. Пановка та інших визначена специфіка моделювання як теоретичного методу та прийому навчання, розкриті функції, роль і місце моделювання у навчальному процесі. Фундаторами сучасної методології математичного моделювання були В.М. Глушков, Б.В. Гнеденко, А.М. Колмогоров, О.А. Самарський, А.М. Тихонов, А.Ф. Турбін, В.С. Королюк, В.М. Остапенко та інші.

Застосування математичних моделей в різних науках є реалізацією методологічної сутності математичних знань і самої математики, сприяє встановленню міжпредметних зв'язків [5]. "Модельність" математичних структур закладена в самій природі математичних знань. Ще в античні часи відомі математики і філософи говорили про принцип відповідності світу реального світу математичному (Піфагор, Фалес, Аристотель, Демокрит, Евклід та інші).

Сучасний світ потребує освічених людей з високим рівнем математичної компетентності. Під поняттям "математична компетентність" розуміють "… спроможність особистості бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і *метод математичного моделювання*, будувати *математичну модель*, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень. Математика не існує у безповітряному просторі, математичні поняття, аксіоми, теорії і теореми мають своїм витоком реальність і своєю метою дослідження реальності за допомогою *математичного моделювання*" [6, с.15].

Мета статті – проаналізувати різні підходи до поняття моделі, з'ясувати види та властивості математичних моделей, а також розглянути деякі види функцій як математичні моделі реальних явищ та процесів у різних галузях науки.

Як відомо, у структурі методології виділяють чотири рівні: філософський, загальнонауковий, конкретнонауковий і технологічний. Метод моделювання відноситься до загальнонаукового рівня методології. Знаходячи застосування в математичному пізнанні, саме в математиці цей метод отримує свій максимальний розвиток. Метод математичного моделювання є однією з найважливіших основ застосування математики в інших галузях науки і техніки.

Розглянемо кілька тлумачень поняття "модель", які зустрічаються у різних наукових джерелах. У філософській літературі:

1) "Модель – уявно представлена або матеріально реалізована система, яка, відображаючи або відтворюючи об'єкт дослідження, здатна замінити його так, що її вивчення дає нам нову інформацію про цей об'єкт" [8].

2) "Модель – умовний образ (зображення, схема, опис тощо) якого-небудь об'єкта (або системи об'єктів). Служить для вираження відношень між людськими знаннями про об'єкти і цими об'єктами" [1].

У логіці модель розглядають як: 1) будь-який уявний або знаковий образ модельованого об'єкта (оригіналу); 2) спеціально створюваний або спеціально дібраний об'єкт, який відтворює характеристики досліджуваного об'єкта ([1], [7]).

Модель – це допоміжний об'єкт, який знаходиться у певній відповідності до об'єкта, що вивчається (оригіналу), і є більш зручним для дослідження оригіналу. Відображаючи окремі особливості поведінки об'єкта-оригіналу, модель має деякі риси, ідентичні з оригіналом, і використовується для одержання такої інформації про оригінал, яку важко або неможливо одержати шляхом безпосереднього дослідження оригіналу.

Оскільки моделі використовуються у різних сферах людської діяльності і для різних цілей, то існує кілька основ для класифікації моделей: статичні та динамічні (за часовим параметром); стохастичні та детерміновані (за підходом до опису параметрів системи); дискретні та неперервні (за множиною значень змінних); натурні, аналогові та знакові (символьні) [9].

Найважливішим видом знакових моделей є математичні моделі. "Математична модель – наближений опис якого-небудь класу явищ зовнішнього світу, вираженний за допомогою математичної символіки" [9]. Шенон зауважує, що одна "… з найбільш корисних і без сумніву найуживаніших форм [моделей] – це математична, яка виражає за допомогою системи рівнянь істотні риси реальних систем чи явищ, що вивчаються" [9, с. 16].

За визначенням В.М. Глушкова, математична модель – це множина символічних математичних об’єктів і співвідношень між ними. За М.М. Амосовим, математична модель – це система, що відображає іншу систему.

Знакову модель з використанням математики можна описати різними способами: аналітично (у вигляді заданих функціональних співвідношень, диференціальних, інтегральних, різницевих рівнянь тощо), алгоритмічно, графічно і т. д. Математичними уявними моделями можна вважати алгоритми й програми, розроблені для обчислювальних машин, які в умовних знаках відбивають (моделюють) певні процеси, що описані диференціальними рівняннями, покладеними в основу алгоритмів, а також різні структурні схеми, які відображають функціональні зв’язки між підсистемами складних систем.

Аналіз літератури ([1], [4], [8], [9]) показав, що немає чіткої і повної класифікації математичних моделей. Найпоширенішою є така [1]:

1) За приналежністю до ієрархічного рівня: математичні моделі мікрорівня, макрорівня та метарівня.

2) За характером властивостей об’єкта, що відображаються: математичні моделі структурні та функціональні.

3) За способом представлення властивостей об’єкта: математичні моделі, аналітичні, алгоритмічні, імітаційні.

4) За способом отримання моделі: математичні моделі теоретичні, експериментально-аналітичні, емпіричні.

5) За особливостями поведінки об’єкта: математичні моделі детерміновані та імовірнісні.

6) За підходом до опису властивостей об'єкта: математичні моделі з зосередженими параметрами та моделі з розподіленими параметрами.

7) За характером урахування характеристик системи: лінійні математичні моделі та нелінійні математичні моделі.

8) За особливістю зміни параметрів моделі в часі: стаціонарні та нестаціонарні математичні моделі.

9) За множиною значень змінних*:* неперервні математичні моделі та дискретні математичні моделі.

Як правило, у процесі математичного моделювання, тобто вивчення явища за допомогою математичної моделі, виділяють 4 етапи: 1) формулювання законів, що зв'язують основні об'єкти моделі. Цей етап завершується записом у математичних термінах сформульованих якостей, уявлень про зв'язки між об'єктами моделі; 2) дослідження математичних задач, до яких призвели математичні моделі. Основне завдання – розв’язання прямої задачі, тобто отримання в результаті аналізу моделі вихідних даних (теоретичних наслідків) для подальшого їх зіставлення з результатами спостережень досліджуваних явищ; 3) з'ясування того, чи задовольняє прийнята гіпотетична модель критерію практики; 4) подальший аналіз моделі в зв'язку з накопиченням даних про явища, які досліджуються, і модернізація моделі [1].

Метою моделювання є здобуття, обробка, представлення і використання інформації про об'єкти, які взаємодіють між собою і зовнішнім середовищем; а модель тут виступає як засіб пізнання властивостей і закономірностей поведінки об'єкту.

Серед основних властивостей моделей виокремлюють такі: цілеспрямованість; скінченність; спрощеність; повнота; адекватність [4].

Цілеспрямованість моделі полягає в тому, що вона завжди будується з певною метою. Ця мета має вплив на те, які властивості об’єктивного явища вважаються істотними, а які – ні. Модель є ніби проекцією об'єктивної реальності під певним кутом зору. Наприклад, моделі вищого навчального закладу як інформаційної, фінансової, енергетичної та соціальної системи будуть зовсім різними. Інколи, залежно від мети, можна отримати ряд проекцій об'єктивної реальності, що вступають у протиріччя. Це характерно, як правило, для складних систем, в яких кожна проекція виділяє суттєве для певної мети з безлічі несуттєвого. Задача моделювання полягає в тому, що для заданого об’єкта потрібно дібрати такий опис, який у повній мірі відображав би оригінал з точки зору заданої мети моделювання.

Скінченність моделі означає те, що модель відтворює лише скінченну кількість властивостей та відношень оригіналу, і через це модель завжди є більш простою, ніж оригінал.

Повнота моделі полягає в тому, що вона має відображати всі істотні з точки зору мети моделювання властивості оригіналу.

Необхідною умовою для переходу від дослідження об’єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів на об’єкт дослідження – вимога адекватності моделі і об’єкта. Адекватність – це відтворення моделлю з необхідною повнотою всіх властивостей об’єкта, важливих для цілей даного дослідження. Це, мабуть, найголовніша властивість моделі, яка визначає можливість її використання. Оскільки будь-яка модель простіша за оригінал, ніколи не можна говорити про абсолютну адекватність, за якої модель за всіма характеристиками відповідає оригіналу. Модель називається ізоморфною (однаковою за формою), якщо між нею і реальною системою існує повна поелементна відповідність, і гомеоморфною, якщо існує відповідність лише між найбільш значущими складовими об'єкту і моделі.

У сучасній науці моделювання розглядають як один із методів пізнання реального світу. У той же час прослідковується зв'язок методу моделювання з іншими загальнонауковими методами методології: методом подібності та методом аналогії. Не дивно, що методологія математичного моделювання бурхливо розвивається, охоплюючи все нові сфери – від розробки технічних систем і керування ними до аналізу найскладніших економічних і соціальних процесів.

Як відомо, математика як предмет і як наука дає чи не найбільший вклад у розвиток абстрактного мислення людини, а математична модель виступає містком між теоретичною, абстрактною мовою науки та реальним явищем навколишнього світу.

До найпростіших і водночас найпоширеніших математичних моделей можна віднести рівняння, нерівності, функції. У математиці розглядається та детально вивчається досить широкий клас функцій: лінійні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні тощо. Крім того, деякі відомі нам закони, постулати, рівняння (закон Гука, Ньютона, Архімеда) можна, а подекуди необхідно розглядати як функції своїх відповідних аргументів, а, отже, як математичні моделі. Наприклад, відомо, що закон руху тіла, що вільно падає під дією сили тяжіння, має вигляд: $S(t)=S_0+v_0t+\frac{gt^2}{2}$. Для того, щоб з останнього співвідношення знайти закон зміни швидкості, потрібно знайти похідну, а щоб прискорення – другу похідну, тобто провести ті перетворення, які в математиці виконують над функціями. Таким чином, закон руху тіла в такому випадку природно розглядати як функцію від часу, або деяку математичну модель, яка описує явище природи – "вільне падіння тіл під дією земного тяжіння".

Звісно, більшість моделей, які використовують, вже давно відомі, – були кимось відкриті до нас. Деякі з них отримали назву законів, постулатів, рівнянь (наприклад, закони Ньютона). Не має жодних сумнівів, що всі вони виникали не одразу – їх появі передували довгі роки досліджень, більшість із запропонованих моделей були відкинуті як такі, що не отримали експериментального чи теоретичного підтвердження. Очевидно, що за всю історію розвитку математики помилкових, "хибних" моделей було набагато більше, ніж правильних, перевірених часом, які стали класичними і які ми тепер вивчаємо, починаючи зі школи. Все це підкреслює важливість вивчення не тільки самих моделей, а й процесу моделювання як основи пізнання навколишнього світу. Навчитися моделювати означає навчитися мислити творчо, креативно; без сумніву таке вміння є головним здобутком сучасної людини.

У своїй діяльності людині часто доводиться мати справу з моделюванням, а особливо з математичним: складання рівнянь, систем рівнянь, нерівностей, запису функцій тощо. Слід відмітити, що математичне моделювання тісно пов’язане із задачами, які носять прикладний характер [2], а, як відомо, саме такі задачі викликають найбільший пізнавальний, дослідницький інтерес. Не дивно, що такого типу задачі є одними з найскладніших (викликають найбільшу трудність), адже вимагають від дослідника творчого, нестандартного, а подекуди абстрактного мислення. Як добре відомо, найважча частина в розв’язанні такої задачі – це процес створення або запису математичної моделі – тобто процес моделювання. На жаль, на цьому важливому моменті не завжди акцентується увага під час навчання та вивчення математики. Так само не приділяється належної уваги цьому питанню у підручниках та посібниках.

Розглянемо деякі основні, вже відомі математичні моделі, з якими ознайомлюються на заняттях з фізики, біології, економіки, хімії, природознавства тощо. Але при цьому, як правило, не йдеться мова про математичну модель, а тільки про відповідний закон, постулат чи рівняння. Таким чином формується відношення до цих формул (законів, рівнянь, постулатів) як до чогось абсолютного, незмінного, як до такого, що завжди було, є і буде! Але ж відомо, що кожен такий закон є не що інше як модель (зокрема математична); кожну цю модель було запропоновано у свій час конкретною людиною (дослідником). Крім цього відомо, що відповідна модель відображає тільки наближено певне явище природи – як, наприклад, закон Гука справедливий тільки при малих деформаціях; деякі із законів з часом змінюються, а деякі взагалі відкидаються – їх замінюють новими, які більш точно, адекватно описують те чи інше явище природи.

1. Моделювання за допомогою лінійної функції

1.а. *Фізика*. Закон Гука. (деформація довгого тонкого стрижня або пружини, справедливий при малих деформаціях) $F = -kx$, де F – сила, k – коефіцієнт жорсткості, x – видовження.

1.б. Рівномірний прямолінійних рух: $x(t) = x_0 + vt$.

1.в. *Молекулярна фізика, хімія.* Закон теплового розширення газів: при сталому тиску залежність об'єму V даної маси газу від температури описується формулою: $\frac{V}{T}=Const$ або $V = cT$.

2. Показникова функція

Природознавство, біологія, хімія.

Процес новоутворення або розпаду. Ще в XVII ст. було встановлено, що чисельність популяцій зростає за законом геометричної прогресії, а вже в кінці XVIII ст. Томас Мальтус (1766-1834) висунув свою відому теорію про зростання народонаселення в геометричній прогресії. Ця закономірність зростання виражається наступною функцією $N=N_0e^{kt}$, де: N – чисельність популяції в момент часу t; N_0 – чисельність популяції в початковий момент часу, k – показник, що характеризує темп розмноження особин в даній популяції. Ця ж функція або модель описує закон радіоактивного розпаду, виражає кількість речовини, яка утворюється при деяких хімічних реакціях, тощо.

3. Степенева функція. Раціональна функція.

3.а. *Фізика.* Закон вільного падіння. Шлях, пройдений тілом за час t виражається функцією:

$$S(t)=S_0+v_0t+\frac{gt^2}{2}.$$

3.б. *Економіка*. Виробнича функція Кобба-Дугласа. Наприкінці 20-х років XX ст. Кобб і Дуглас (1928) сформулювали тип неокласичної виробничої функції, яку можна записати у вигляді: $Q=AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$, де Q – обчислений або очікуваний індекс виробництва продукції обробної промисловості за деякий характерний інтервал часу; L – індекс зайнятості в обробній промисловості; K – індекс капіталу; A, α – додатні числа, що характеризують технологію виробництва.

4. Обернено пропорційна функція

Фізика. Закон Ома: $I=\frac{U}{R}$, тобто сила струму обернено пропорційна величині опору. Закон Бойля-Маріотта: При сталій температурі об’єм газу та тиск пов'язані формулою: $V = \frac{c}{P}$, де c – константа. Об'єднаний газовий закон Бойля-Маріотта, Гей-Люссака та Шарля: $\frac{pV}{T} = const$.

5. Тригонометрична функція

Фізика. Рівняння гармонічних коливань: $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

6. Логарифмічна функція

Психологія. Закон Вебера-Фехнера – психофізіологічний закон, що описує залежність відчуття E від подразнення R: $E = k\ln R$.

Таким чином, застосування математичних моделей в різних науках являє собою реалізацію методологічної сутності математичних знань і самої математики. Найбільш загальною в методологічному плані є проблема пояснення принципової можливості використання математики та математичних моделей в різних галузях знання. Обговорюючи цю проблему, відомий математик, академік Б.В. Гнеденко пише про "болісні питання, які ставили перед собою багато поколінь математиків і філософів: яким чином наука, здавалося б, не має прямих зв'язків з фізикою, біологією, економікою, застосовується з успіхом у всіх цих областях знань?"[3].

Висновки. Отже, поняття моделі розглядається у багатьох науках. Найважливішою із знакових моделей є математична модель, зокрема, функція. Метод математичного моделювання застосовується для дослідження об'єктів різної природи. Напрям подальших досліджень – з'ясування ролі та місця математичного моделювання у формуванні методологічної компетентності студентів – майбутніх учителів математики.

ЛІТЕРАТУРА (REFERENCES TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Большая Советская Энциклопедия. 3-е издание. – М.: Советская Энциклопедия, 1968-1979.
Great Soviet Encyclopedia. 3rd edition. - M .: Sovetskaya Encyclopedia, 1968-1979.
2. Борисов Є.М. Задачі прикладного змісту на уроках геометрії / Є.М. Борисов, Н. В. Кугай // Математика в рідній школі. – 2014. – № 7-8. – С.17-21.
Borisov E.M. Tasks application content on geometry lessons / E.M. Borisov, N.V. Kugai // Mathematics in the home school. - 2014. - № 7-8. - S.17-21.
3. Гнеденко Б.В. Математика и научное познание. / Б.В. Гнеденко. – М. : Знание, 1983. – 63 с.
Gnedenko B.V. Mathematics and scientific knowledge. / B.V. Gnedenko. - M.: Znanie, 1983. - 63 p.
4. Квєтний Р.Н. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1: навчальний посібник / За заг. ред. Р.Н. Квєтного. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 191 с.
Kvyetnyy R.N. Computer simulation of systems and processes. Computing techniques. Part 1: Tutorial / ed. R.N. Kvyetnoho. - Vinnitsa:VNTU, 2013. - 191 p.
5. Кугай Н.В. Методологічні знання та міжпредметні зв'язки / Н.В. Кугай, Л.Ф. Сухойваненко // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, II(16), Issue: 33, 2014. – С. 49-52.
Kugai N.V. Methodological knowledge and interdisciplinary communication / N.V. Kugai, L.F. Suhoyvanenko // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, II (16), Issue: 33, 2014. - P. 49-52.
6. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ [монографія] / С.А. Раков. – Х. : Факт, 2005. – 360 с.
Rakov S.A. Mathematical education: competence approach using ICT [monograph] / S.A. Rakov. - X.: Fact, 2005. - 360 p.
7. Словник з логіки. − [Е-ресурс].
Glossary of logic. – On-line. Available at:
http://logic.slovaronline.com/
8. Философский энциклопедический словарь. – М.: Советская Энциклопедия, 1983. – 836 с.
Philosophical Encyclopedic Dictionary. - M .: Sovetskaya Encyclopedia, 1983. - 836 p.
9. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем – искусство и наука. / Р. Шеннон. – М.: Мир, 1978. – 424 с.
Shannon R. Simulation modeling systems - the art and science. / R. Shannon. - M .: Mir, 1978. – 424 p. .

Kuhai N., Borysov Ye. Methodological aspects of mathematical modeling

Abstract. The article analyzes the different interpretations of the term "model". It was found the most common classification of models. It was determined basic properties of models and mathematical modeling stages. We consider some basic, well-known mathematical models, which are widely used in various fields.

Keywords*: methodology, model, method of mathematical modeling*

Кугай Н. В., Борисов Е.Н. Методологические аспекты математического моделирования

Аннотация. В статье проанализированы различные толкования понятия "модель". Установлено наиболее распространенную классификацию моделей. Выделены основные свойства моделей и этапы математического моделирования. Рассмотрены некоторые основные, известные математические модели, которые широко используются в различных областях науки.

Ключевые слова: *методология, модель, метод математического моделирования*