PEDAGOGY

Гъров Коста[1], *Бизова-Лалева Ваня*[2]

Геометричен модел на задачи от движение с използване на динамичен софтуер

[1] *Гъров Коста, Доцент, доктор на математическите науки, Пловдивски университет „Паисий Хилендарски", Пловдив, България*
[2] *Бизова-Лалева Ваня, България, Национална търговска гимназия, Пловдив, България*

Резюме: Настоящата работа е посветена на описанието на геометричен модел за решаване на задачи от движение с помощта на динамичния софтуер Geo Gebra. Основна фигура в този модел е окръжността като геометрично място на точки в равнината, намиращи се на равни разстояния от дадена точка от същата равнина. Предложеният геометричен модел за решаване на задачи от движение може да се използва: за онагледяване на движенията на обекти; за експериментално намиране на решението на задача; за проверка на отговора на задача, решена чрез други средства. Представеният в статията подход е иновативен в обучението по математика и спомага за активизиране на познавателната дейност на учениците с повишен интерес в областта на математическите и компютърни науки.

Ключови думи: геометричен модел, динамичен софтуер, математическа задача, движение, GeoGebra, анимация.

Известно е, че математиката е дедуктивна наука, която работи с абстрактни модели на обекти, които са предмети и явления от обективната реалност. "*Обектът е оригинал, а моделът – негов образ, описан от субекта с някакви средства – езикови, графични, гласови и други подходящи възможности. Създаването на модели наричаме моделиране"* [2, стр. 44].

С прилагането на дидактическия принцип за нагледност в обучението по математика значително се подобрява усвояването на абстрактните математически понятия. Онагледяването е представяне на теоретично познание, на система от понятия, на концепции, на схващания във вид на сетивно доловими модели, чертежи, схеми, графични изображения и др.

Този принцип е свързан с *„обогатяване и разширяване на сетивния опит на учениците, в уточняване на сетивните им представи и развитието на наблюдателността*" [1, стр.175]. „З*а това, което трябва да се знае, трябва не само да се разкаже, че да бъде възприето от слуха, но то трябва да се нарисува, за да може чрез зрението предметът да се запечата във въображението"*. [3]

С масовото навлизане на информационните технологии в практиката и в частност в обучението значително се улеснява реализацията на дидактическия принцип за нагледност.

Пример на такъв динамичен процес от практиката е движението на материалните тела, което е обект на изследване както от астрономията и физиката, така и от математиката.

В обучението по математика задачи от движение се решават още във втори клас, като приложение на таблицата за умножение. Покъсно (6.-8. клас) те са един от основните видове задачи, на които се съставят **математически модели**, чрез уравнения, неравенства и системи от тях.

В настоящата статия представяме **геометричен модел** за онагледяване и експериментално намиране на решението на задачи от движение изучавани в средното училище.

Показваме възможностите на програмната среда **Geo Gebra** за създаване на **динамични модели на движение на един или повече материални обекта,** за които са известни скоростите на движение (или зависимости между тях), а се търси времето на движение.

Особен интерес представляват задачите, в които **не са определени посоките на движение.** При традиционните методи за решаване на такива задачи се изисква прилагането на сериозни математически знания и умения, които обикновено не са известни на учениците.

Основен компонент в геометричния модел на задачите от движение е окръжнотта, като геометрично място на точки в равнината, намиращи се на равни разстояния от дадена точка от същата равнина.

Ако посоката на движение не е известна и обект T започва да се движи от точка A праволинейно равномерно с постоянна скорост v, след време t ще се намира на разстояние $AT = v{\cdot}t$, т.е. ще е точка от окръжност с център A и радиус $r = v.t$. Радиусът на окръжността е функция на параметъра **t,** затова при промяната му се получават динамични концентрични окръжности, чрез които се симулира движението на обекта *T*.

При работа с динамичния софтуер **Geo Gebra** се въвежда **плъзгач** за измерване на времето на движение **t,** чрез който се управляват движенията на обектите.

Алгоритъмът за решаване на задачи от движение, чрез описания геометричен модел се състои в:

– избор и фиксиране на началните точки на движение за всеки от движещите се обекти;

– въвеждане на плъзгач за измерване на времето на движение;

– построяване на окръжности с центрове фиксираните точки и радиус **r=v·t** където времето е функция на въведения параметър за всяко от движещите се тела (създаване на модел на движенията на реалните обекти)

– промяна на стойностите на параметъра **t,** чрез инструмента **Премести** или чрез поставяне на плъзгача в режим **Анимация,** до получаване на желаното взаимно положение на окръжностите помежду си или с други геометрични обекти (онагледяване движенията на реалните обекти, чрез създадения модел)

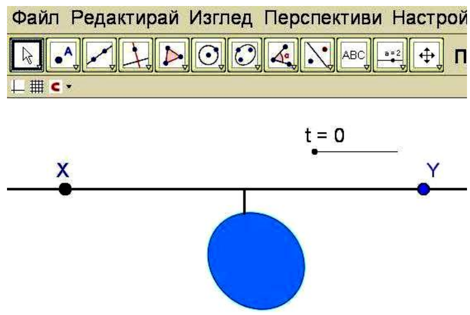
– стойността на **t**, която показва в този момент плъзгачът е търсеното решение на задачата (следва интерпретация на стойността на параметъра t в зависимост от практическата ситуация отнасяща се за реалните обекти).

Със следващата задача описваме създаването на геометричен динамичен модел на задача от движение с помощта на динамичния софтуерен продукт Geo Gebrата.

Чрез три динамични окръжности онагледяваме движенията на обектите. Показваме и експерименталното получаването на отговора на задачата.

Задача 1. Разстоянието между селата *X* и *Y* е 15 км. Рибарят *R* и шофьорът на камион *K* са съседи и живеят в *X*, а приятелят им велосипедистът *V* – в *Y*. Рибарят тръгнал пеша към язовир, намиращ се по средата на *XY* и на един километър от пътя. Един час по-късно велосипедистът тръгнал към *X*, а 12 мин. след него и шофьорът с камиона си към *Y*. Шофьорът носел забравените от рибаря кукички. Той изпреварил рибаря, но се сетил за кукичките когато видял велосипедиста и му ги предал. Ще успее ли велосипедистът да предаде кукичките на рибаря, преди той да се отклони от пътя към язовира, ако скоростите на рибаря, велосипедиста и камиона са съответно: 5 км/ч,15 км/ч и 45 км/ч ?

Решение: На *фиг. 1* е представен модел на пътя и язовира. Въвеждаме плъзгач за отчитане на времето на движение *t*, $t \in (0;3)$, чрез което се предава динамичност на движението на обектите.

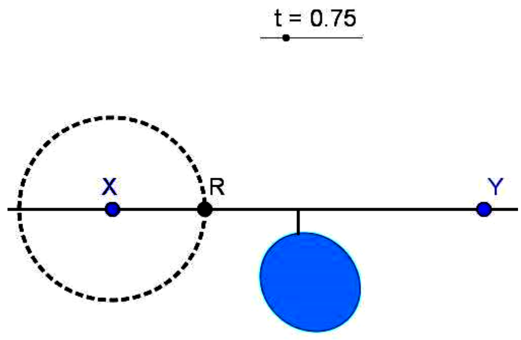


фиг. 1

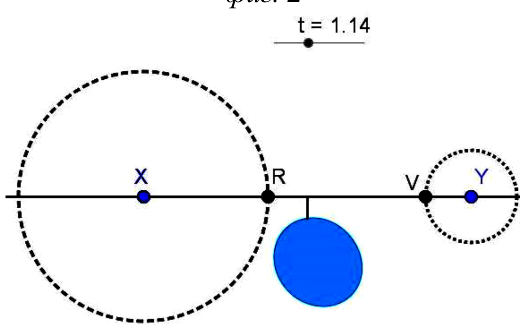
Означаваме с *t > 0* времето на движение на рибаря, с (*t* – 1) и (*t* – 1,2) - времената на движение на велосипедиста и камиона, така отчитаме по-късното им тръгване.

С помощта на три окръжности с центрове *X* или *Y* (началните точки на движение) моделираме движението на рибаря, велосипедиста и на камиона. Радиусите на окръжностите са модели на изминатия от тях път, а точките от окръжностите са местоположенията на обектите след време t.

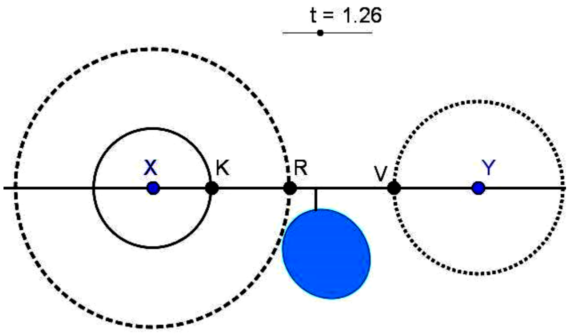
С инструментите **Окръжност с център и радиус** и **Сечение** построяваме окръжности $k(X; r = 5t)$, $k_1(Y; 15(t-1))$ и $k_2(X; r = 45(t-1{,}2))$ и пресечните им точки *R*, *V* и *K* с отсечката *XY*.



фиг. 2



фиг. 3

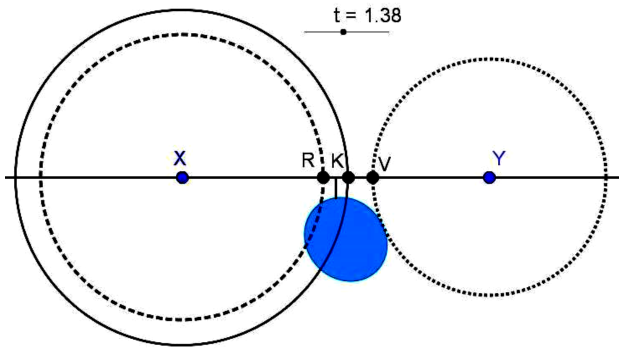


фиг. 4

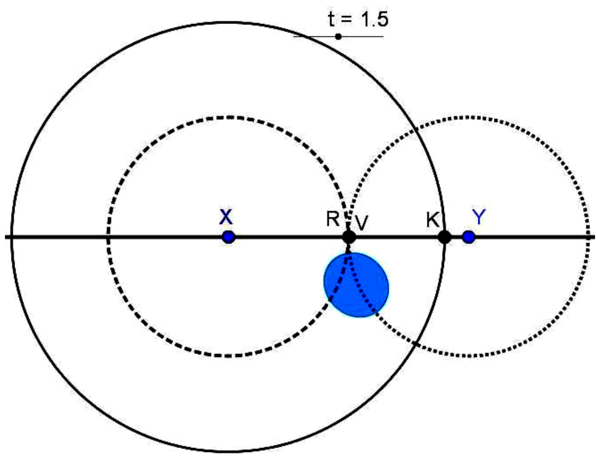
На *фиг. 2-4* са представени модели на задачата при: $t = 0{,}75$, $t \in (0;1)$ – когато се движи само рибарят, $t = 1{,}14$, $t \in [1;1{,}2)$ – когато се движат рибарят и велосипедистът и $t = 1{,}26$, $t \in [1{,}2;3)$ – когато се движат и тримата участници в задачата.

Програмата GeoGebra позволява да скрием окръжностите и да наблюдаваме движението само на точките *R*, *V*и *K* – моделите на рибаря, велосипедиста и камиона.

С инструментите **Премести** или **Анимация включена** променяме стойността на параметъра *t*, докато обектите заемат желаното в задачата взаимно положение.



фиг. 5



фиг. 6

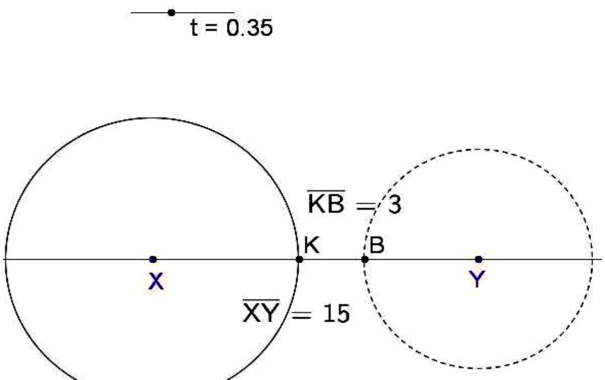
На *фиг.5* камионът е изпреварил рибаря, но още не е срещнал велосипедиста.

От *фиг.6* се вижда, че срещата на рибаря и велосипедиста се осъществява точно преди рибарят да се отклони от пътя към язовира и той ще получи забравените кукички.

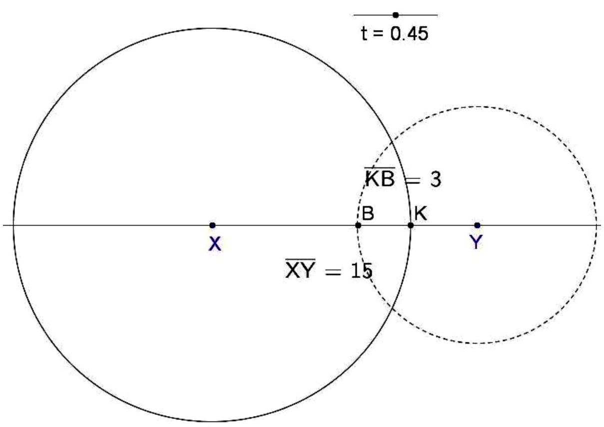
Задача 2. Прав второкласен път от националната републиканска мрежа минава през населените места *X* и *Y*, като разстоянието между тях е 15 км. По този път в 6 часа и 35 минути от *Y* тръгва колоездач със средна скорост 15 км/ч, а 12 минути по-късно от *X* тръгва тежко товарен камион със скорост 45 км/ч. В колко часа разстоянието между превозните средства ще бъде една пета от разстоянието между селищата?

Решение: Окръжностите $k;\left(X;\, r = 45(t - 0{,}2)\right)$ (12 мин. = 0.2 ч.) и $k_1\left(Y;\, r = 15t\right)$ са построени с инструмента **Окръжност с център и радиус** и се използват за симулиране движенията съответно на камиона и велосипеда.

Пресечните точки на k и k_1 с правата *XY*, са местата, където е възможно да се намират камионът и велосипедистът след време на движение $t = 0.35$ ч *(фиг.7)* (стойността показана от плъзгача).



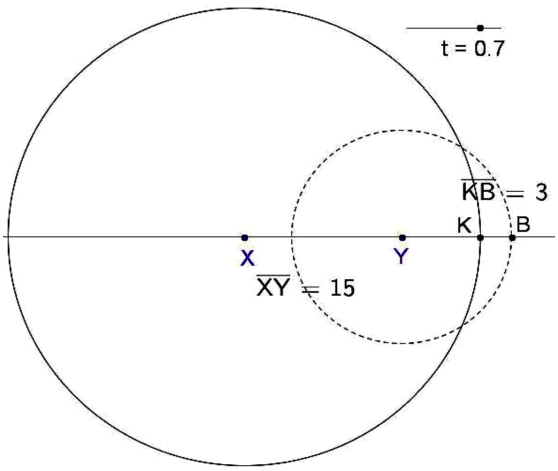
фиг. 7



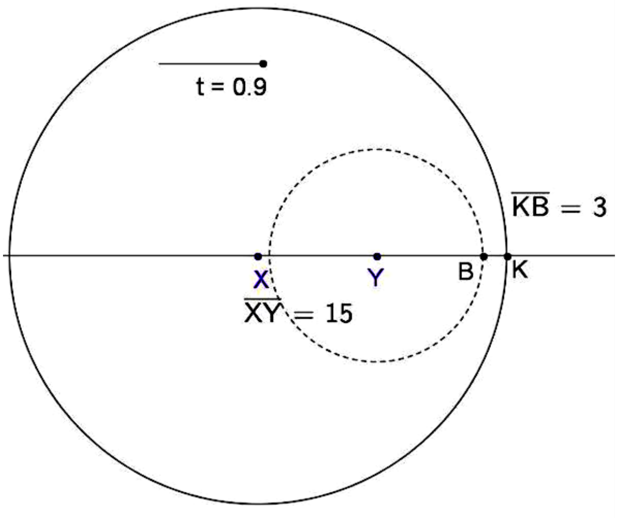
фиг. 8

Разглеждаме случая *(фиг. 7)* когато превозните средства се движат едно срещу друго, преди срещата. С инструмента **Разстояние**  измерваме дължината на отсечката *KB* и с инструмента **Премести**  движим плъзгача, докато разстоянието *KBстане* 3 км (1/5 от 15 км). Стойността $t = 0.35$ (показана на плъзгача) е търсеното време на движение в часове. Следователно 21 минути след тръгването на велосипедиста превозните средства могат да се намират на разстояние 1/5 от разстоянието между населените места. Това може да се случи в 6 ч.и 56 мин.

На *фиг. 9* е показана възможността след срещата превозните средства отново да се намират на разстояние 3 км. Този път стойността на параметъра показана на плъзгача е $t = 0.45$, т.е. след 27 минути. Камионът и велосипедът ще са разположени по желаният начин в 7 ч.и 2 мин.



фиг. 9



фиг. 10

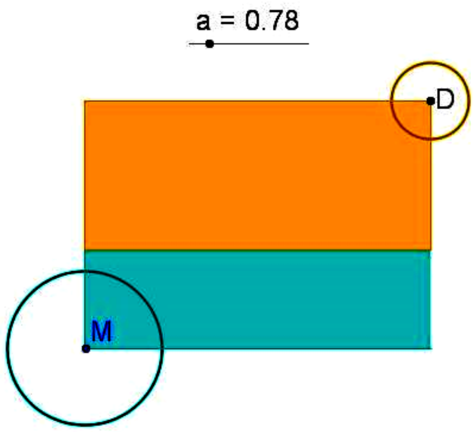
Съществува вариант за движение на превозните средства в една посока, като камионът е след велосипеда, преди да го настигне *(фиг. 9)*. Плъзгачът показва стойност $t = 0.7$ ч. След 42 минути, т.е. в 7 ч.и 17 мин. условието на задачата ще е изпълнено отново.

Разглеждаме последната възможност за еднопосочно движение, когато камионът е изпреварил велосипеда *(фиг. 10)*. Исканият резултат се получава при $t = 0.9$ ч. Възможно е в 7 ч.и 29 мин. превозните средства да се намират на разстояние 3 км.

В решената задача не са определени посоките на движение, но съществуват само няколко възможности за този избор. В следващата задача е известна само правата, върху която лежи търсеното решение на задачата, но съществуват безброй възможности за избор на посока на движение.

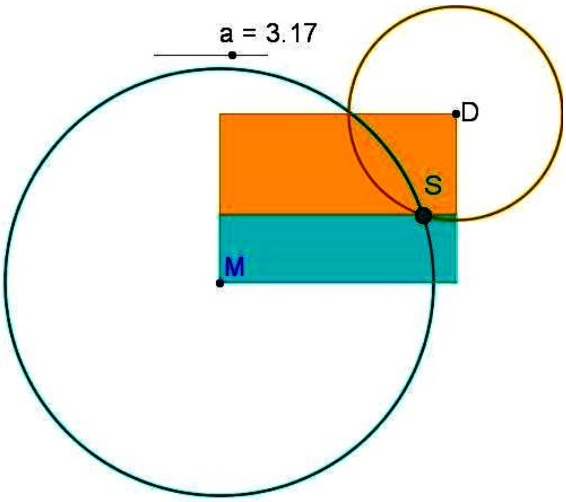
Задача 3. Младеж се разхожда с лодка в морето. Когато е на 200 м от брега забелязва, че от там му маха с шапката си неговата приятелка, която е на разстояние 300 м от водата. Известно е, че младежът може да гребе два пъти по-бързо, отколкото девойката може да тича по пясъка. Определете мястото от плажната ивица, където след най-кратко време младежът ще прегърне приятелката си, ако двамата започнат да се движат едновременно и разстоянието между петите на перпендикулярите, спуснати от младежите към плажната ивица е 700 м.

Решение: На *фиг. 11* с *M* и *D* са отбелязани местоположенията на младежа и девойката. Те тръгват едновременно.Скоростта на младежа е два пъти по-голяма от тази на девойката, такъв ще бъде и изминатият от него път. Търсим мястото на срещата – точка *S* от плажната ивица, за която $SM = 2SD$.



фиг. 11

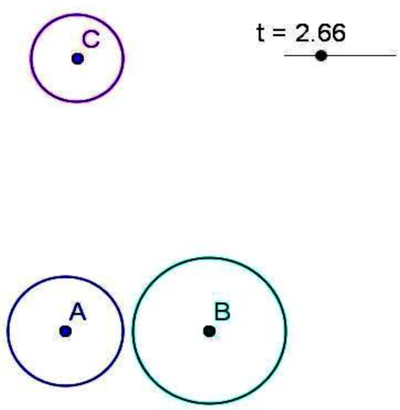
Означаваме с *a* изминатия от девойката път. Построяваме окръжности $k(M; r = 2a)$ и $k_1(D; r = a)$.Чрез инструмента **Премести**  променяме стойностите на параметъра *a* докато двете окръжности и плажната ивица се пресекат в търсената точка *S (фиг. 12)*.



фиг. 12

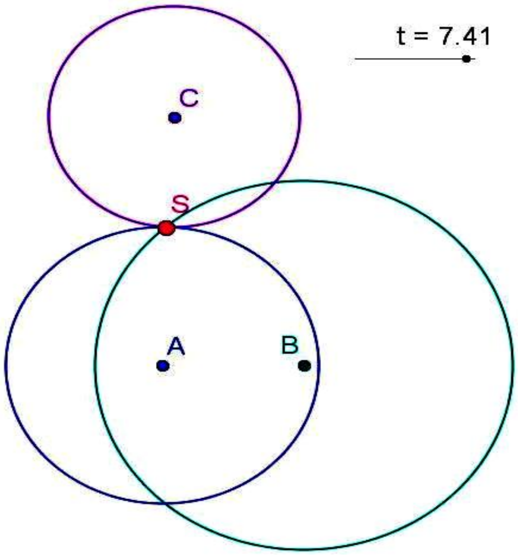
Задача 4. [4, стр. 44] По време на маневри в открито море командирите на корабите *A*, *B* и *C* получили от адмирала лаконична заповед: В максимално кратък срок да се съсредоточат в един район. Командирите били уведомени за разстоянията между корабите, в момента на получаване на заповедта: *AB* = 100 мили, *AC* = 200 мили и *BC* = 220 мили. Максималните скорости, които могат да развиват корабите са: за *A* – 15 възела, за *B* – 20 възела и за *C* – 12 възела. След колко време и на кое място ще бъде изпълнена заповедта на адмирала?

Решение: На *фиг. 13* е изобразено разположението на бойните кораби, съгласно условието на задачата. Корабите тръгват едновременно. Да означим с **t** времето на движението им до срещата. Търсим такава точка в равнината, която се намира на разстояние 15*t* от A, 20*t* от B и 12*t* от *C*, т.е. пресечната точка на три окръжности $k(A; r=15t)$, $k_1(B; r/12t)$ и $k_2(C; r=20t)$, радиусите, на които зависят от параметъра **t** .

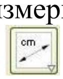


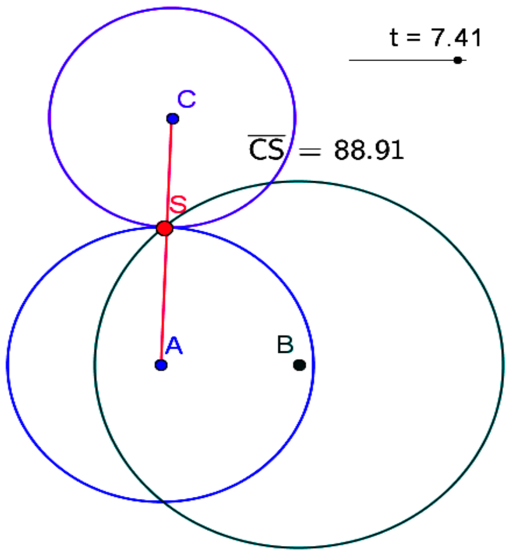
фиг. 13

Поставяме параметъра **t** в режим **Анимация включена** и определяме стойността *t* = 7.41, когато трите окръжности имат за първи път една обща точка *S (фиг. 14)*.



фиг. 14

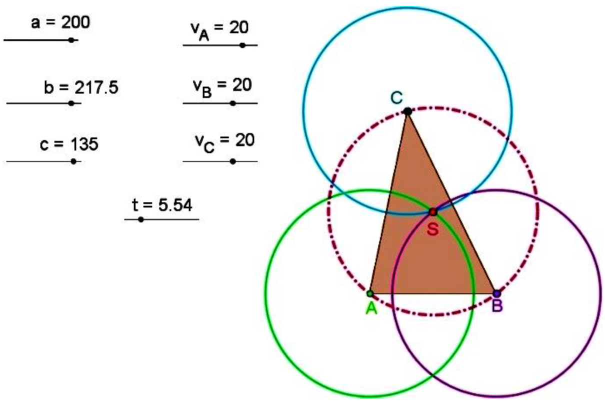
Точката *S* е търсеното място на съсредоточаването. Тя лежи на отсечка *AC* и е на разстояние 88.91 мили от *C*. Дължината на отсечка *CS* = 88.91мили измерваме, чрез инструмента **Разстояние**  (*фиг. 15*). Заповедта на адмирала ще бъде изпълнена след 7 часа и 24 мин. и на 88.91 мили от *C*.



фиг.15

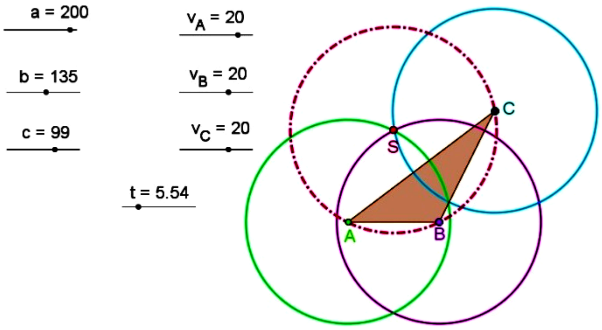
Софтуерния продукт GeoGebra позволява въвеждането на повече от един параметър (плъзгачи), с което могат да се съставят и решават множество задачи. Да се върнем на разглежданата задача. Могат да се въведат параметри: за разстоянията между корабите – d_{AB}, d_{AC}, d_{BC}; за скоростите на корабите – v_A, v_B, v_C и един параметър за времето на движение.

Ако корабите тръгват едновременно и се движат с една и съща скорост, с инструмента премести коригираме стойностите на скоростите $v_A = v_B = v_C$, тогава те ще изминат еднакви разстояния до срещата, т.е. $SA = SB = SC$ *(фиг. 16)*. Точка S е центърът на описаната около ΔABC окръжност, която не е построена по традиционния начин (като пресечна точка на симетралите на страните на триъгълника).

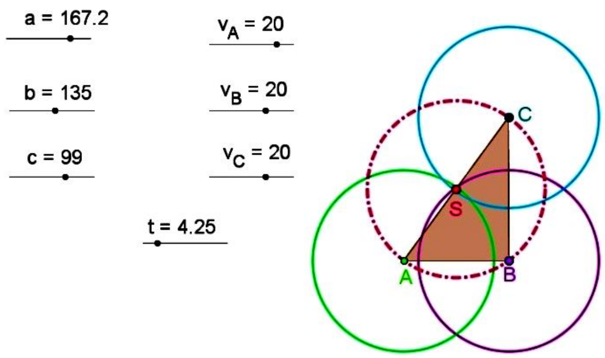


фиг. 16

С промяна на дължината на една от страните на триъгълника $\Delta ABC(d_{AB})$ се променя видът на триъгълника според ъглите му. Лесно и бързо се онагледява местоположението на центъра на описаната около триъгълник окръжност, в зависимост от вида на триъгълника според ъглите му *(фиг. 17)* и *(фиг. 18)*.



фиг. 17

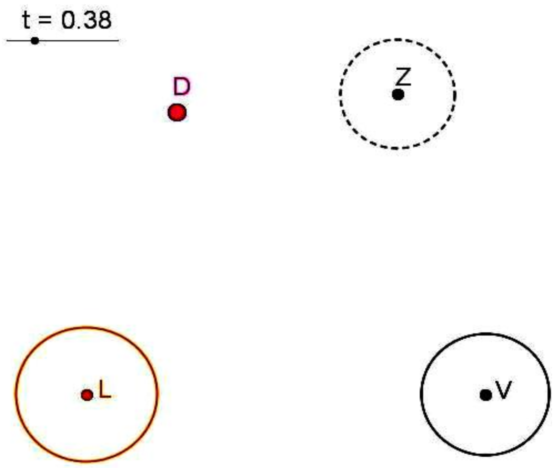


фиг. 18

Да разгледаме и няколко занимателни задачи, които се решават със същата конструкция.

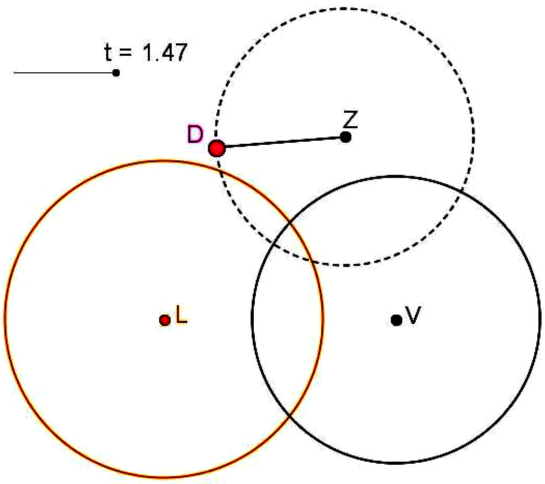
Задача 5. Зайче, намиращо се на 25 метра от дупката си, видяло, че към него тичат Кума Лиса и Вълчо, разположени както е показано на *фиг.20.* Ще успее ли зайчето да се скрие в дупката си, ако тича със скорост 17 м/с., Лисана – с 21 м/с., а Вълчо – с 19 м/с.?

Решение: На *фиг.19* е построен модел на разположението на героите в преследването. Животните започват да тичат едновременно. Въвеждаме плъзгач за времето **t.** Търсим съществува ли точка от отсечката DZ, в която се пресичат окръжностите $k(Z; r = 17t)$ и $k_1(L; r = 21t)$ или окръжностите $k(Z; r = 17t)$ и $k_2(V; r = 19t)$ *(фиг. 19)*.



фиг.19

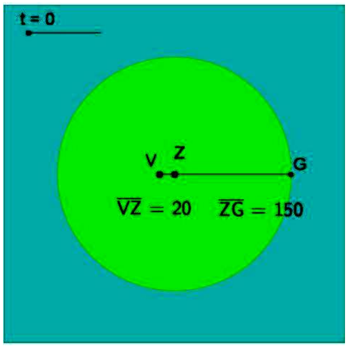
На *фиг. 20* е показано, че след време t = 1,47 секунди, Зайчето се скрива в дупката си, Лиса е близко до целта, а Вълчо – далеч от нея.



фиг.20

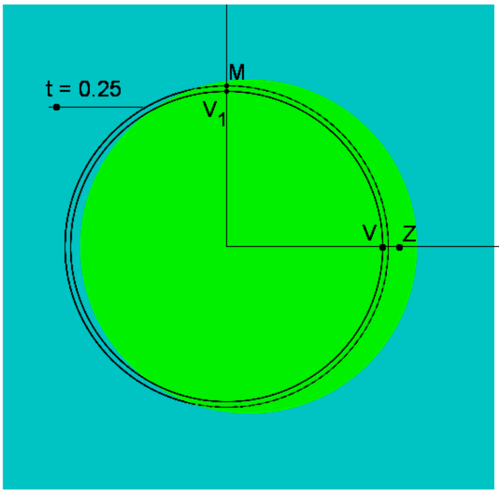
Задача 6. Вълк забелязва зайче на 20 метра от него. За да отклони вниманието на вълка, Мама-Зайка преминава напряко пред носа на вълка със скорост 580 м/мин. Вълкът спира за една секунда, за да прецени кое да предпочете – „количеството” или „качеството”. Зайчето е на 150м пред гъстата гора и тича със скорост 540 м/мин. Кой е правилният избор за вълка, ако той бяга със скорост 600 м/мин?

Решение:Съставяме геометричния модел на задачата (*фиг.21),* като въвеждаме плъзгач за време t и окръжностите $k(Z; r = 540t)$, $k_1(Z; r = 580t)$ и $k_2(V; r = 600(t - 1/60))$, където с V и Z са означени местата на вълка и зайчето.

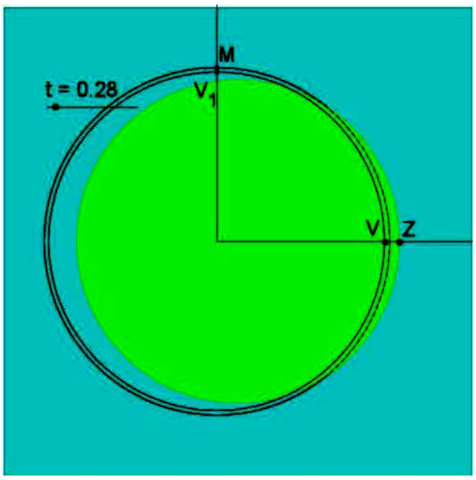


фиг. 21

На *фиг. 22 и 23* е показано, че след t = 0,28 мин. зайчето и майка му се скриват в гъстата гора. Изводът е, че вълкът няма печеливш ход.



фиг. 22



фиг.23

Считаме, че представения в статията подход е иновативен в обучението по математика и спомага за активизиране на познавателната дейност на учениците с повишен интерес в областта на математическите и компютърни науки.

Предложеният модел може да се използва: за онагледяване движенията на обекти; за експериментално намиране на решението на задача; за проверка на отговора на задача, решена чрез други средства; за решаване на практически проблеми със знания от училищната математика; за създаване на положителни емоции, чрез занимателните задачи и накрая, но не на последно място, че науката и технологиите се развиват, за да се повишава ефективността на човешкия труд.

Благодарност. Авторите изказват благодарност към Научен проект НИ13-ФМИ-002 към НПД на ПУ „Паисий Хилендарски” за частичното финансиране на настоящата работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев М., Процесът на обучението – дидактика, Университетско издателство „Св. Климент Охридски”, София, 1996 г.
2. Илиев Л.,Теория на моделирането, ДИ „Народна просвета”, София,1980 г.
3. Коменски Я., Великата дидактика, УИ „ Св. Климент Охридски, София, 2008г.
4. сп. Математика ,брой 6,1975 г.
5. www.geogebra.org (последно посетен на 25.06.2013 г.).

Gurov Costa, Bizova-Laleva Vanya

Geometric Model of Mathematical Problems of Motion with Dynamic Software

Abstract: This work is dedicated to the description of a geometric model to solve problems of motion using the dynamic software GeoGebra. A major figure in this model is the circumference as a geometrical locus of points in a plane located equidistant from a given point in the same plane. Its points are used to model the location of an object moving uniformly straight at a constant speed *v* and time *t*. Its center is the starting point of the object motion and its radius is the covered distance $S=tv$ for time *t*.

The main tool for creating dynamic models is the time slider. The motions of objects are simulated with dynamic concentric circles whose radius is a function of time.

Below are the possibilities of the software GeoGebra to create dynamic models of mathematical problems, including:

– Objects move unidirectionally and opposite directionally;
– Objects start moving simultaneously and after a certain time interval;
– The objects performing motion are one, two or three in number;
– The directions of movement are known or not known.

The problems in which the motion directions are not specified are of particular interest. The traditional methods for solving such problems require the application of considerable mathematical knowledge and skills.

The proposed geometric model to solve problems of motion can be used to visualize the motion of objects, to find a solution to a problem experimentally, and to verify the answer to a problem solved by other means. The approach presented in this article is innovative to teaching mathematics and promotes intensification of the cognitive activity of students with increased interest in the mathematical and computer sciences.

Keywords: geometric model, dynamic software, mathematical problem, motion, GeoGebra, animation.

Гъров Коста, Бизова-Лалева Ваня

Геометрическая модель задачи движения с динамичскими софтуером

Аннотация: Настоящая работа посвещена описанию геометрической модели для решения задач движения при помощи динамического софтуера Geo Gebra. Основной фигурой в этой модели является окружность как геометрическое место точек на плоскости, которые находятся на одинаковых расстояниях от данной точки на той же плоскости. При помощи точек этой окружности моделируется местонахождение объекта, который движется прямолинейно равномерно с постоянной скоростью *v* за время *t*. Центр окружности является начальной точкой движения объекта, а радиус окружности - расстояние $S=tv$ за время *t*. Основным инструментом для создания динамических моделей является плозгунь за время *t*. Движения объектов симулируются с помощью динамических концентрированных окружностей, радиус котороых является функцией времени *t*.

Даны возможности програмной середины Geo Gebra для создания динамических моделей задач, в которых :

– объекты двигаются однонаправленно и противонаправленно;
– объекты начинают своё движение одновременно, а также через определенный интервал времени;
– объекты, которые двигаются, могут быть один, два или три;
– направления движения известны, и такие, когда они неизвестны.

Особым интересом представляют задачи, в которых направления движения неопределены**.** При традиционных методах для решения таких задач требуется применение значимых математических знаний и умений.

Предложенная геометрическая модель решения задач движения может быть использована: показать движение объектов; для экспериментального нахождения решения задач; для проверки ответа задачи, которая решена другими способоми. Предложенный в работе способ иновативен при обучении по математике и помогает для увеличения познавательной деятельности учеников, которые имеют интерес в области математических и компьютерных наук.

Ключевые слова: геометрическая модель, динамический софтуер, математическая задача, движение, GeoGebra, анимация.