Горбачев В.И.[1]

Методология числовой картины мира

[1] *Горбачев Василий Иванович, доктор педагогических наук, профессор, Брянский государственный университет имени ак. И.Г. Петровского, г. Брянск, Россия*

Аннотация. Рассматриваются категории числовой картины мира. Исследуются закономерности методической системы изучения числовых систем.

Ключевые слова: методика обучения математике, числовые системы, картина мира.

Число – одна из фундаментальных категорий человеческого мышления, универсальное средство всякой исследовательской деятельности, наиболее абстрактное понятие современной математики, обладающее сложной структурой содержательного, модельного, теоретического планов.

Отражая категориальный уровень представления числа в математике, методика обучения математике определяет числовую содержательно-методическую линию в учебной математической деятельности учащихся всех возрастов в качестве основной.

Устоявшаяся методическая схема предполагает весьма длительное изучение числовых систем с объёмными тренинговыми действиями, с постоянным превращением понятия числа из объекта анализа в средство исследования других теорий (преобразований, функций, уравнений, фигур), с использованием контекстной формы представления теоретических фактов, методов. Наиболее значимыми достигаемыми результатами методической системы обучения выступают:
1) последовательное расширение понятия числа для исследования более широких классов задач, приложений в математике, других дисциплинах, практической деятельности;
2) становление математического языка в системе формально-операторных преобразований в каждой из числовых систем.

При всей обоснованности, за пределами методических целей остаются и, как следствие, далеко не в полной мере формируются следующие аспекты методологического плана:

– слитное изучение теорий числовой системы и её базовых моделей с подменой процедуры доказательства свойства «наглядными» действиями на модели характеризуют «евклидов» уровень становления теории;

– лидирующая роль операторных преобразований затушевывает, или даже исключает формирование фундаментальных свойств числовых систем (дискретность – непрерывность, конечность – счётность – континуальность);

– фоновый характер целостного представления числовых систем в их базовых характеристиках не позволяет видеть основания и методы интеграции теории числовых систем с другими математическими теориями (Рис. 1)

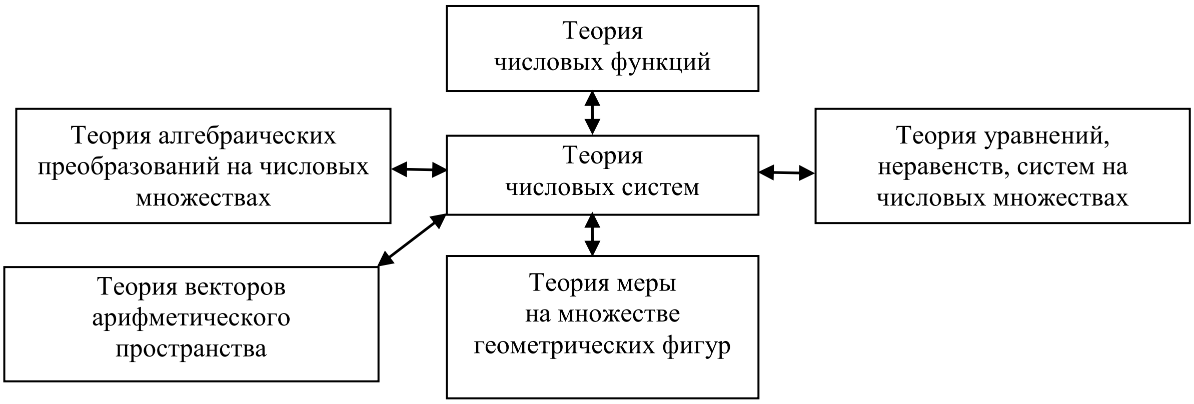

Рис. 1. Структура интеграции математических теорий

Системный подход как основа становления:

– целостных представлений в форме учебной математической картины мира, позволяет выделить методологические принципы проектирования методической системы изучения числовых систем:

– каждая из числовых систем $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ формируется в содержании общих представлений – в процедуре восхождения от абстрактного к конкретному, в системе своих фундаментальных характеристик;

– теория каждой из числовых систем отдифференцирована от её базовых моделей (с конструктивным наследованием моделей, с разделением доказательства свойств и их наглядных образов);

– операторные действия исследуются не в целевой изолированной форме, а в качестве средства становления теории, её связи с каждой из базовых моделей;

– интеграция числовых систем на теоретическом, модельном, операторном уровнях выступает основой целостного представления категории числа, обоснования взаимосвязей математических теорий (Рис. 1).

В современной математике каждая из числовых систем представлена в форме абстрактной алгебраической теории:

– в системе аксиом алгебраических структур полукольца, кольца, поля со свойством полной упорядоченности;

– в системе фундаментальных свойств конечности, счётности, континуальности, дискретности, непрерывности;

– с наследованием понятий числа, алгебраических операций, отношений и их свойств;

– в единстве со своими базовыми моделями, конструируемыми из объектов предыдущей числовой системы;

– с процедурами доказательства формально-операторных свойств в теории и их наглядной демонстрации на адекватных моделях.

В развёртывании последовательности теорий числа закономерно прослеживается:

– система представлений числовой системы как целостности в её фундаментальных характеристиках (предмет, объект, модельные образы);

– содержательно-аксиоматическое исследование свойств операций, отношений на множестве объектов, классов объектов – абстрактная алгебраическая теория;

– система моделей (геометрическая, арифметическая, алгебраическая) теории, сконструированных из объектов предыдущей числовой системы, наследующих её свойства, определяющих прикладные аспекты теории;

– внутренняя интеграция теорий в последовательности их изоморфного включения, внешняя интеграция целостной теории числовых систем в структуре математических теорий на содержательном, модельном, либо теоретическом уровнях.

В научном плане теоретико-модельная структура теорий имеет линейную форму (рис.2)

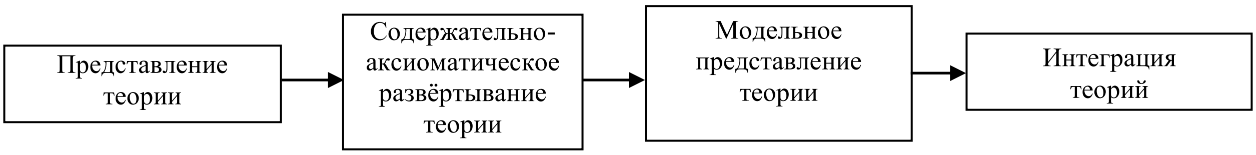

Рис. 2. Методология научного уровня развития числовых систем

Процедура содержательно-дидактического адаптирования теорий числовых систем в числовой содержательно-методической линии приводит к несколько иной структуре (рис. 3)

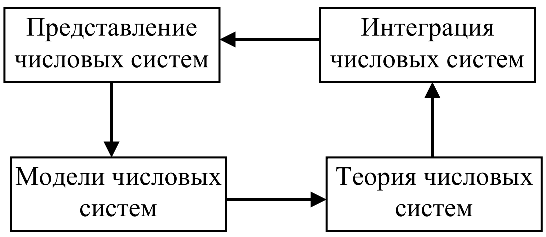

Рис 3. Методология развития числовых систем общеобразовательного курса математики

Компоненты методологической схемы внутренне обусловлены. Её содержанием выступает представление числовых систем. Теории, их базовые модели, внутренняя и внешняя интеграция – это важные средства становления, развития представления. В методологическом плане представление числовых схем – процессе создания, развития внутреннего субъектного образа числовых систем в процедуре восхождения от абстрактного к конкретному в системе взаимосвязанных видов математической деятельности (деятельность представли-вания):

– становления образов каждой из числовых систем в единстве с образами их элементов;

– исследования фундаментальных свойств числовых систем, как базиса представления числовой системы;

– теоретического осмысления операторных действий в каждой из числовых систем;

– конструирования, исследования моделей теорий числовых систем в их взаимной связи;

– слияния в единый образ теории числовой системы и её базовых моделей;

– фиксация структурного соответствия теоретико-модельного образа числовой системы и основных направлений её применения в математике, в учебных дисциплинах, в практической деятельности.

Методическую сложность определяет не только системный характер видов деятельности представления, но и объективный характер их формирования на следующих фундаментальных основах современной математики [1], [2]:

1) Методах:
– аксиоматического метода построения всякой математической теории (Евклид);
– метода исследования математической теории в системе её моделей (Д. Гильберт).

2) Теории:
– теории множеств;
– теории алгебраических систем (групп, колец, полей);
– теории пределов.

3) Понятиях:
– конечности;
– равномощности;
– изоморфизма;
– бесконечности;
– дискретности;
– непрерывности;
– упорядоченности

1. Представление формальной целостности числовых систем. В соответствии с закономерностью восхождения от абстрактного к конкретному, числовые системы $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ выступают в качестве формальной целостности, в которой несформированное понятие «число» выступает генетически исходной содержательной абстракцией.

Число-результат абстрагирования способов практического измерения величин в человеческой деятельности с позиции удобства, точности.

Измерение величин и счёт, как его начальная ступень, выступает исходными категориями становления числа.

Счёт (нумерация) – биективное соответствие между отрезком [1, n] натурального ряда и множеством X

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & [1, & 2, & 3, & \ldots, & n] & \quad a_i = f(i) \\
f: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \quad X = f([1;n]) \\
 & X=\{a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_n\} &
\end{array}
$$

Равенство числа элементов двух множеств X и Y определяется через соответствие отрезку натурального ряда

$$X = f([1,n]) \quad Y = g([1,n])$$

$$Y = g([1,n]) = (g \circ f^{-1})(X)$$

Композиция биективных соответствий g и f^{-1} приводит к фундаментальному понятию равномощности: два множества X и Y называются равномощными, если между ними можно установить биективное соответствие.

Равномощность множеств X и Y означает, что элементы множеств X и Y пронумерованы (соответствие) одним и тем же отрезкам [1, n] натурального ряда. Этот факт определяет понятие конечного множества $|X| = n,\ |Y| = n$, число элементов, как общую характеристику класса всех равномощных множеств.

Биективное соответствие множества X и множества N всех натуральных чисел определяет универсальность понятия равномощности и в классе бесконечных множеств. Биекция $f: X \to \mathrm{N}$ означает:

– множества X и $\mathbb{N}$-равномощные, т.е. $|X| = |\mathbb{N}|$;

– множество X называется счетным;

– множество X имеет счётную мощность α;

– множество X характеризуется кардинальным числом α.

Система равенств $|Q| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ означает равномощность множеств рациональных, целых и натуральных чисел, их счётность.

Равномощность множеств выступает характеристикой понятия бесконечности: множество X называется бесконечным, если оно равномощно собственному подмножеству

$$X - \text{бесконечное} \leftrightarrow \begin{cases} 1)\ X_1 \subset X, \quad X_1 \neq X; \\ 2)\ |X_1| = |X| \end{cases}$$

Факт неравномощности $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ ($|N| \neq |R|$) в сочетании с условием $\mathbb{N} \cong \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{R}$ устанавливает, что множество $\mathbb{R}$ действительных чисел имеет мощность, большую, чем счётное множество. Мощность $\mathbb{R}$ обозначает $\mathfrak{c}$, называют мощностью континуума, при этом $\alpha < \mathfrak{c}$.

Вывод: Понятие равномощности, общее для конечных и бесконечных множеств выделяет:

– конечные множества;

– бесконечные счётные множества;

– бесконечные множества мощности континуума.

Выделенный фрагмент представления, т.е. числовой картины мира», имеет определенную образную форму (Рис. 4).

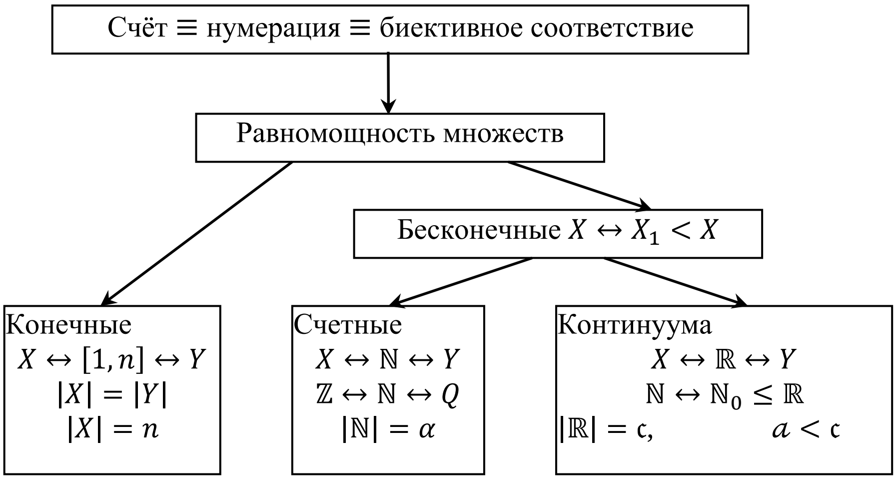

Рис. 4. Классификация множеств в процедуре счёта.

Если счет – процесс абстрагирования практической деятельности, определяющий категории «конечное» и «бесконечное», то измерение обобщает понятие «точность измерения» до парной категории «дискретное – непрерывное» – одной из фундаментальных в современной математике и её приложениях.

Измерение – геометрическая форма процедуры сравнения определённой величины X с единицей (меркой) на шкале числовой системы, удовлетворяющей конкретному уровню (условию) точности.

В классификации шкал числовых систем уровни области измерения выделяются следующими характеристиками единицы:

– единица измерения без дробления;

– единица измерения с конечным дроблением;

– единица измерения с бесконечным дроблением.

а) множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел – асимметричная шкала измерения только кратных величин с единицей без дробления.

б) множество $\mathbb{Z}$ целых чисел – симметричная шкала измерения только кратных величин с единицей без дробления

в) множество $\mathbb{Q}$, рациональных чисел – симметрично шкале измерения только кратных величин с конечным дроблением единицы измерения

г) множество $\mathbb{R}$ действительных чисел – симметрично шкале измерения любых величин с бесконечным дроблением единицы измерения.

Свойство шкал числовых систем $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ измерять только кратные (единице измерения) величины – свойство их дискретности (прерывистости).

Числовое множество называется дискретным (в топологическом смысле), если в окрестности всякого его элемента есть посторонние элементы (всякий элемент является граничным, или изолированным).

Наличие неделимой единицы измерения $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ или конечного деления единицы в $\mathbb{Q}$ объясняет их дискретность (прерывистость).

Отрицание дискретности (прерывистости) – непрерывность (недискретность) числового множества.

Числовое множество называется непрерывным (недискретным, если в окрестности его любого элемента отсутствуют посторонние элементы (его всякий элемент является внутренним).

Бесконечное дробление единицы измерения объясняет непрерывность множества $\mathbb{R}$ действительных чисел – свойство измерения любых величин.

Итак, понятие «дискретность числовой системы» характеризуется:

– измерением ограниченного множества величин – только кратных (единице);

– ограничения уровня точности измерения величин;

– прерывистостостью (изолированные, граничные) расположения элементов шкалы числовой системы ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$);

Понятие «непрерывность числовой системы» – результат дробления единицы измерения до бесконечности – характеризуется:

– измерением всех величин;

– предельным уровнем точности;

– непрерывным (внутренние) расположением элементов шкалы числовой системы ($\mathbb{R}$).

Развитие понятий «число», «числовая система», как результат абстрагирования процедуры измерения величины – важный фрагмент «числовой картины мира» (Таб. 1)

Таблица 1.

Представление числовых систем в процедуре измерения

Числовые системы ≡ шкалы измерения велин			
Единица измерения без дробления		Единица измерения с конечным дроблением	Единица измерения с бесконечным дроблением
$\mathbb{N}$ – асимметричная шкала для измерения только кратных (натуральных) величин	$\mathbb{Z}$ – симметричная шкала для измерения только кратных (целых) величин	$\mathbb{Q}$ – симметричная шкала для измерения только кратных (дробных) величин	$\mathbb{R}$ симметричная шкала для измерения всех (действительных) величин
Шкала $\mathbb{N}$– исходная	Шкала $\mathbb{Z}$ поглощает шкалу $\mathbb{N}$ симметрией $\mathbb{N} \leq \mathbb{Z}$	Шкала $\mathbb{Q}$ поглощает шкалу $\mathbb{Z}$ конечным дроблением единицы $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$	Шкала $\mathbb{R}$ поглощает шкалу Q бесконечным дроблением единицы $\mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$
$\mathbb{N}$ – дискретное (числа – изолированные элементы)	$\mathbb{Z}$ – дискретное (числа – изолированные элементы)	$\mathbb{Q}$ – дискретное (числа – граничные элементы)	$\mathbb{R}$ – непрерывное (числа внутренние элементы)

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбачев В.И. Развитие аксиоматического метода в содержании общеобразовательного курса математики / Вестник калужского университета. Вып. 4. Изд-во КГПУ им. Циолковского, 2009. – С. 59-65.

2. Горбачев В.И. Содержание общего математического образования и математическая картина мира / Вестник Брянского государственного университета. Вып. 1. Изд-во Брянский государственный университет им. И.Г Петровского, 2011. – С. 280-293

Gorbachev V.I. Methodolody of the number world-image

Abstract. The article deals with the categories of the number world-image. It studies the principles and methods of teaching number systems.

Keywords. Methods of teaching mathematics, number systems,world-image.