

Филиппова О.А.¹

Развитие функциональных представлений учащихся
в категории математической картины мира

¹ Филиппова Олеся Александровна, преподаватель, Дятьковский индустриальный техникум,
г. Дятьково, Брянская область, Россия

Аннотация: Исследуется понятие и структура математической картины мира в классе функций. Исследуются базовые функциональные модели для описания общего представления теории функций.

Ключевые слова: функция, математическая картина мира, модель теории функций.

Современная философия науки в качестве методологической закономерности развития всякой научной теории определяет ее опосредованность предметной (специальной) картиной мира – системно-структурным представлением научной области знания, отражающим как ее внутрисистемный характер, так и способы ее интеграции в общем спектре научного знания [6].

Развивающееся из устоявшихся физической, химической, естественнонаучной картин мира [4] понятие специальной картины мира отражает предмет науки в его фундаментальных представлениях и, как следствие, опосредует (репрезентирует) явления, процессы мира (природы, социума, внутреннего). В этой связи картина мира выступает не только методологией построения развития теории, но и методологией познавательной деятельности в содержании ставшей теории [9].

Математика, как в своем классическом представлении, так и в системе узко-спектральных современных теорий со специфическими классами объектов в принципе не выделяется в многообразии научных областей. В научно-философском плане ее развитие также осуществляется посредством и вместе с развитием адекватной картины мира. Более того, в силу многообразия теорий в математике, математическая картина мира может рассматриваться в качестве интегральной - алгебраической, геометрической, аналитической, вероятностной картин мира. В историко-научном плане термин «математическая картина мира» не обладает свойством состоятельности, хотя ее использование в исследованиях неоспоримо.

Общеобразовательный курс математики (математика, геометрия, алгебра и начала анализа), формирующийся в процессе длительного исторического развития, представляет собой фиксированный спектр определенных математических теорий, адаптированных с позиции общей культуры, психолого-дидактических закономерностей учебной деятельности:

- теории числа;
- теории уравнений;
- теории функций;

- теории геометрических фигур;
- теории векторного пространства;
- теории вероятностей;
- теории меры;
- теории преобразований;
- теории дифференциального и интегрального исчисления.

С каждой из теорий общеобразовательного курса математики связана адекватная система общих представлений – целостный фрагмент познавательной математической картины мира (числовая, функциональная, векторная, геометрическая, вероятностная). Каждая из фрагментарных «картин мира» обладает «системой существенных свойств понятия математической картины мира:

система общих представлений о классах математических объектов, о понятийной форме свойств объектов, выраженной на специфическом (математическом) языке, о специфических (доказательных) способах установления свойств объектов;

– система фундаментальных понятий, взаимных связей в содержании математических теорий и их базовых моделей, формирующих предметную область образования (математику);

– система обобщенных способов деятельности, интеллектуальных методов, посредством которых осуществляется интерпоризация теорий;

– система приложений математических понятий, фактов, методов, теорий и адекватных им моделей в содержании общего образования;

– система общих представлений о взаимной связи математически спроектированного мира и различных сторон реального мира, выступающих средой формирования образовательной среды мировоззрения»[2, 283].

Значимость в теории и методике обучения математике категории математической картины мира определяется ее базовыми функциями в познавательной математической деятельности учащихся:

1. Мировоззренческой – математический способ познания мира, то есть применение конструкций математически спроектированного ми-

ра в исследовании различных сторон реального мира и видения таких приложений, формируется только через системно-структурные, фундаментальные представления – через математическую картину мира.

2. Общекультурной – значимыми элементами человеческой культуры выступают не только математические теории, структурирующие интеллектуальную, общественно-производственную сферы человеческой деятельности, но и та система общих представлений, в которой математические теории развиваются.

3. Методологической – интеграция теории в целостную область математики, приложение идей, методов одной теории в другую, построение моделей теории в заданном множестве объектов, осуществляются на базе категориальных понятий теории, ее фундаментальных закономерностей, т. е. на компонентах математической картины мира.

4. Субъектной – формирование субъектного образа теории осуществляется не через конкретные данные, результаты, а через систему общих представлений, структурную схему теории, в которой находятся основания как частных теоретических фактов, так и ее интеграционные связи, прикладные идеи, методы.

Ни одна из функций познавательной математической картины мира не реализуется посредством деятельности учащихся в содержании теории, в конкретно-практической деятельности. Это означает, что видение учащимся картин (системно-структурного фундаментального образа) теории, использование ее компонентов в деятельности, интериоризации картины мира выступают методологическим средством становления каждой из математических теорий во внутреннем плане субъекта.

В классической теории и методике обучения математике категория математической картины мира детально не исследована, методологическая закономерность становления субъектного образа теории не выступала ведущим компонентом методической системы обучения математике. Более того, содержательно-методический подход в обучении математике проектирует одновременное изучение нескольких теорий (функций, уравнений, преобразований) в их интегративных связях, что существенно затушевывает видение структурных компонентов картины мира. И все же факты невыделенности познавательной математической картины мира, методической задачи формирования математической деятельности в процедуре становления ее субъектного образа означает не отсутствие категории картины мира в методической системе, а интуитивное построение, использование категории вне

выделения термина, вне кристаллизации адекватной методики обучения.

Для цели выделения содержательных компонентов математической картины мира следует учесть общенаучную закономерность – интегральная картина мира формируется из специальных в содержании выделения их фундаментальных взаимных связей. Это означает, что для выделения познавательной математической картины мира необходимо предварительно выкристаллизовать специальные (теоретические) картины – функциональную, числовую, геометрическую, вероятностную, уравнений.

В достаточно широком спектре теорий общеобразовательного курса математики одной из ведущих выступает общая теория функций (числовых, векторных, точечных).

Понятие функции, по выражению Ф. Клейна, «есть то понятие, которое в течение последних 200 лет заняло центральное место всюду, где только мы встречаем математическую мысль» [7, 18].

Общие концептуальные идеи развития теории функций в содержании алгебры и начал анализа разрабатывались в работах А.Н. Колмогорова [5], Г.В. Дорофеева [3], Н.Я. Виленкина [1], А.Г. Мордковича [8].

В системных методических исследованиях получила обоснование функционально-графическая линия в качестве ведущей содержательно-методической линии общеобразовательного и профильного курсов математики.

Наиболее значимыми содержательно-методическими результатами функционально-графической линии выступают:

– в системе последовательных классов элементарных функций выделяется система фундаментальных свойств монотонности, ограниченности, периодичности, экстремальности общего понятия числовой функции, заданной на системе непрерывных промежутков множества действительных чисел;

– выделение в каждом из классов элементарных функций общего способа исследования, развитие которых обобщается в общем способе исследования понятия числовой элементарной функции с помощью аппарата производных.

Однако при всей значимости базовых понятий, методов, представлений в сложившейся функционально-графической линии оказываются неразработанными методологически факты:

– функционально-графическая линия развивает понятие числовой – заданной на непрерывных промежутках системы действительных чисел – вне классов функций на конечных, счетных числовых множествах, на множествах ..., на множествах векторов пространства, на множе-

стве геометрических фигур евклидовой геометрии, на множестве событий и т. д.;

– вне исследования остаются важнейшие в математике понятия-категории «конечность-бесконечность», «дискретность-непрерывность», «предел», «производная».

– все подклассы элементарных функций рассматриваются как рядоположения вместе с классом всех элементарных функций, хотя связь понятия функции и классов числовых функций определяется в категории «теория – модель».

Таблица 1.

Развитие свойств элементарной функции в системе классов

Классы элементарных числовых функций	Базовые свойства понятия функции
Линейные функции	График функции; угловой коэффициент; промежутки знакопостоянства
Квадратичные функции	Возрастание, убывание функции, точки минимума и максимума функции
Дробно-рациональные функции	Точки разрыва функции, вертикальная асимптота
Показательные функции	Монотонность функции, знакопостоянство функции
Логарифмические функции	Обратная функция, симметричность графиков обратных функций
Тригонометрические функции	Периодичность функции, четность и нечетность функции
Обратные тригонометрические функции	Области определения и значений обратных функций, ограниченность графика обратной функции

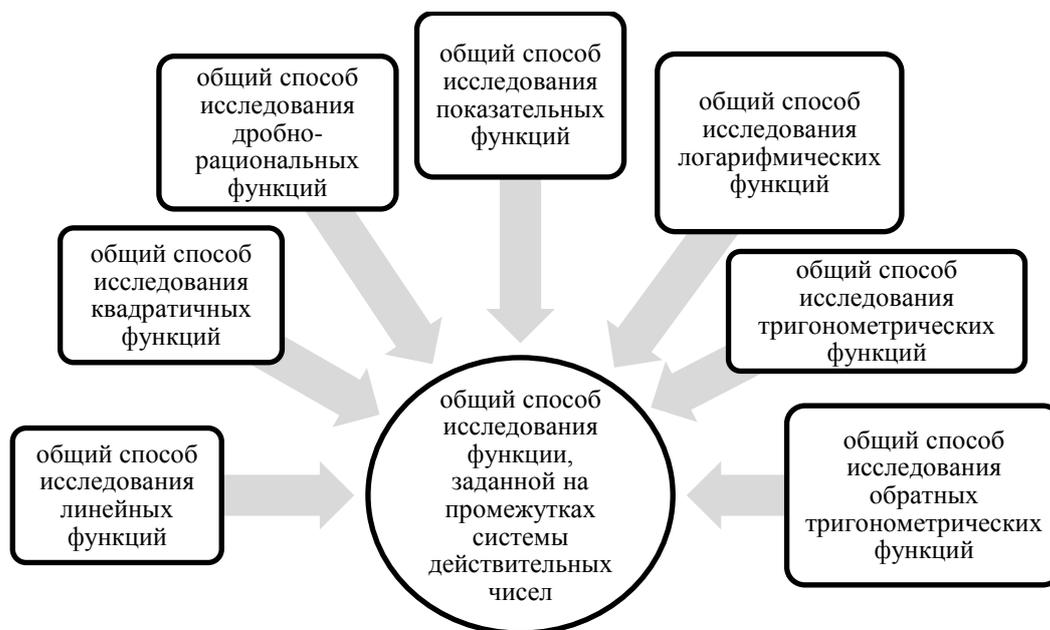


Рис. 1. Схема формирования общего способа исследования функции

В соответствии с методологией построения предметных картин мира ведущим компонентом ее построения выступает общее представление о классах объектов, системе понятий-категорий, принципах формирования теории во взаимной связи с ее моделями.

Учебная функциональная картина мира как важный компонент познавательной математической картины мира структурируется в системе следующих базовых положений:

1. Понятие функция – фундаментальное абстрактное математическое понятие, базирующееся на понятиях теории множеств обладающее характеристическими свойствами функциональ-

ности (для всех x, y, z если $y=f(x)$ и $z=f(x)$, то $y=z$) и определенности (для всякого x существует y такой, что $y=f(x)$);

2. Абстрактная категория функции дополняется понятиями-категориями композиции функций, обратной функции, фундаментальными свойствами дискретности, непрерывности, на их основе строится абстрактная теория функций – вне конкретных множеств объектов, вне специфической системы свойств;

3. Заданием конкретных множеств A и B из определенных математических теорий евклидовой геометрии выделяются конкретные классы функций – модели теории функций с системой

свойств, определенной свойствами объектов множеств A и B :

а) класс отображений трехмерного евклидова пространства V над полем \mathbf{R} – пространственно-векторная модель теории функций одной, нескольких переменных в составе класса функций;

б) класс преобразований плоскости евклидовой геометрии – пространственно-точечная модель теории функций;

с) класс функций меры на множестве геометрических фигур евклидовой геометрии – пространственно-метрическая модель теории функций;

д) класс функций аналитического соответствия евклидовой геометрии – векторно-координатная модель теории функций.

1. Заданием пространства событий Ω и отрезка $[0,1]$ действительных чисел задается функция вероятности – вероятностная модель.

2. Заданием множества натуральных чисел задается класс последовательностей $\{x_n\}$ –

функций натурального аргумента. Заданием аналитического соответствия

$$f(x) = c, f(x) = ax + b, f(x) = ax^2 + bx + c, f(x) = a^x, f(x) = \log_a x, f(x) = \sin x, f(x) = \cos x, f(x) = \operatorname{tg} x, f(x) = \operatorname{ctg} x$$

задается класс функций на непрерывных отрезках системы \mathbf{R} действительных чисел в форме класса элементарных функций класс последовательностей и класс элементарных функций формируют базовые функциональные модели на числовых множествах (табл. 2).



Таблица 2. Структура числовых моделей теории функций

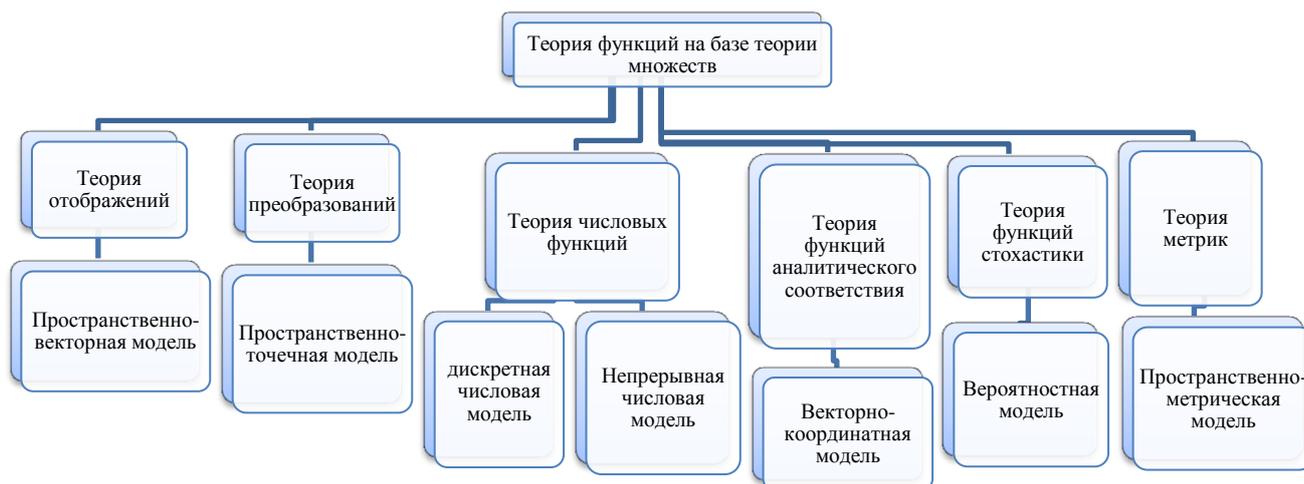


Таблица 3. Общее представление функциональной картины мира

Абстрактное понятие функции, система моделей теории функций формируют ... компонент

функциональной картины мира – общее представление (табл. 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н.Я.; Шварцбурд С.И. Математический анализ / Н.Я. Виленкин, С.И. Шварцбурд / учеб. пособие для IX-X классов сред. школ с мат. Специализацией. – М.: Просвещение, 1969. – 575 с.
2. Горбачев В.И. Содержание общего математического образования и математическая картина мира / Вестник Брянского государственного университета. Вып. 1. Изд-во Брянский государственный университет им. И.Г Петровского, 2011. С.280-293.
3. Дорофеев Г.В. Понятие функции в математике и в школе / Г.В. Дорофеев // Математика в школе, 1978, – №2. – С.10-27.
4. Дышлевый П. С. Естественнонаучная картина мира как форма синтеза знания / П. С. Дышлевый // Синтез современного научного знания. – М.: 1973. – 273с.
5. Колмогоров А.Н. Что такое функция / А.Н. Колмогоров // Математика в школе, 1978, – №2. С. 27-29.
6. Кузнецова Л.Ф. Картина мира и ее функции в научном познании / Л.Ф. Кузнецова. – Минск: Изд-во Университетское, 1984. – 142 с.
7. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. Т.1. Арифметика. Алгебра. Анализ / Пер. с нем. / Под ред. В.Г. Болтянского. – М.: Наука, 1882. – 452 с.

Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. 2013, Vol. 5.

8. Мордкович А.Г. Новая концепция школьного курса алгебры / А.Г. Мордкович // Математика в школе, 1969, – №6. С. 28-33.
9. Степин В.С. Теоретическое знание / В.С. Степин. – М.: Прогресс-Традиция, 2003. – 744 с.

Filippova O. A.

The development of functional representations of pupils in the category of mathematical picture of the world

Abstract: the concept and structure of a mathematical picture of the world of a class of functions is investigated. Basic functional models for the description of general idea of the theory of functions are investigated.

Keywords: function, a mathematical picture of the world, a model of the theory of functions.