Босовський М.В., Бочко О.П., Третяк М.В.

Вивчення розбіжних послідовностей у курсі математичного аналізу

Босовський Микола Васильович, кандидат педагогічних наук, доцент
Бочко Оксана Петрівна, кандидат педагогічних наук, доцент
Третяк Микола Васильович, кандидат педагогічних наук, доцент
Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, м. Черкаси, Україна

Анотація. У статті розглянуто авторську концепцію вивчення розбіжних послідовностей у курсі математичного аналізу. Наведено аргументи на користь вивчення розбіжних послідовностей та їх частинних границь одночасно і разом зі збіжними послідовностями. Указано деякі важливі застосування розбіжних послідовностей та їх верхньої і нижньої границь у різних розділах математичного аналізу, звернуто увагу на міжпредметні зв'язки, що виникають завдяки цим поняттям.

Ключові слова: *математичний аналіз, розбіжні послідовності, збіжні послідовності, теорема*

Постановка проблеми. У більшості діючих підручників з математичного аналізу питання вивчення розбіжних послідовностей та їх частинних границь не розглядаються. Не стали вони предметом і методичних розвідок. Проте необхідність вивчення цих питань на часі, цього вимагають: оновлення змісту курсу математичного аналізу, включення до нього елементів теорії функцій; потреби інших математичних дисциплін, особливо тих, що ґрунтуються на основі математичного аналізу; необхідність формування та розвитку математичної культури студентів. Про це свідчить внесення зазначених питань до підручників $[1-6]$ з математичного аналізу низки провідних університетів. Однак слід зазначити, що серед авторів зазначених підручників немає одностайності щодо методики вивчення розбіжних послідовностей та їх частинних границь.

Мета статті – запропонувати до розгляду авторську концепцію вивчення розбіжних послідовностей в курсі математичного аналізу.

Виклад основного матеріалу. Багаторічний досвід викладання математичного аналізу утвердив нас у думці, що вивчати розбіжні послідовності слід одночасно і разом зі збіжними послідовностями, зіставляючи та порівнюючи їх. Такий підхід має ряд переваг: 1) він економний з точки зору затрат учбового часу; 2) він дозволяє студентам повніше, глибше зрозуміти фундаментальні поняття збіжності та границі послідовності у процесі їх постійного зіставлення та порівняння з поняттями розбіжної послідовності, частинної границі; 3) він дозволяє увести поняття частинної границі послідовності, нижньої та верхньої границь послідовності на ранньому етапі вивчення математичного аналізу і потім протягом усього курсу закріплювати та застосовувати їх; 4) він забезпечує більш тривалу і якісну пропедевтику цілої низки важливих математичних понять.

Вивчення розбіжних послідовностей пропонується здійснювати у такий спосіб.

1. Уводимо поняття частинної границі послідовності в термінах околів та множини частинних границь числової послідовності.

Означення 1. Нехай (x_n) – послідовність дійсних чисел. Точка $\alpha \in \mathrm{R}$ називається частинною границею послідовності (x_n), якщо у будь-якому околі $U(\alpha)$ цієї точки міститься безліч членів послідовності (x_n).

Домовимось позначати через $L(x_n)$ множину частинних границь послідовності (x_n).

2. Формулюємо теореми.

Теорема 1. Нехай (x_n) – послідовність дійсних чисел, $\alpha \in \mathrm{R}$.

$$\alpha \in L(x_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \exists n \in N \left(n > m \wedge |x_n - \alpha| < \varepsilon\right)$$

Теорема 2. Множина $L(x_n)$ частинних границь послідовності (x_n) дійсних чисел – непорожня і замкнена.

Теорема 3. Для того щоб точка $\alpha \in \mathrm{R}$ була частинною границею послідовності (x_n) дійсних чисел, необхідно і достатньо, щоб існувала підпослідовність (x_{n_k}) така, що $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$.

Теорема 4. Нехай (x_n) – послідовність дійсних чисел, $\alpha \in \mathrm{R}$. $\alpha = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \Leftrightarrow \alpha -$ єдина частинна границя послідовності (x_n).

3. Уводимо поняття нижньої та верхньої границь числової послідовності.

Означення 2. Найменша з частинних границь послідовності (x_n) називається її нижньою границею, а найбільша з її частинних границь називається верхньою границею.

Для нижньої та верхньої границь послідовності (x_n) використовуються позначення $\underline{\lim}\, x_n$ та $\overline{\lim}\, x_n$ відповідно.

4. Ілюструємо введенні поняття та теореми прикладами:

Приклад 1. (x_n), $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathrm{N}$. $L(x_n) = \{-1,1\}$.

Приклад 2. (x_n), $x_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$, $n \in \mathrm{N}$. $L(x_n) = \left\{e, \frac{1}{e}\right\}$.

Приклад 3. (x_n), $x_n = \{\sqrt{n}\}$, $n \in \mathrm{N}$, $\{a\}$ – дробова частина числа a. $L(x_n) = [0,1]$.

Приклад 4. Послідовність (x_n) дійсних чисел така, що $x_{n+1} - x_n \to 0$. Покажіть, що $L(x_n) = [\underline{\lim}\, x_n, \overline{\lim}\, x_n]$

Приклад 5. Доведіть, що

$$\underline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} x_k,\ \overline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} x_k.$$

5. Формулюємо теореми про перехід до верхньої та нижньої границі у рівностях та нерівностях.

Теорема 5. Нехай (x_n) – послідовність дійсних чисел, $\alpha \in \mathrm{R}$, тоді $\underline{\lim}(\alpha x_n) = \alpha\, \underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}(\alpha x_n) = \alpha\, \overline{\lim}\, x_n$

Теорема 6. Якщо послідовності (x_n), (y_n) дійсних чисел такі, що мають смисл операції $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$ чи $\overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$, то відповідно $\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n \leq \underline{\lim}(x_n + y_n)$, $\overline{\lim}\left(x_n + y_n\right) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$.

Теорема 7. Якщо (x_n), (y_n) – послідовності невід'ємних дійсних чисел, то $\underline{\lim} x_n \underline{\lim} y_n \leq \underline{\lim}(x_n y_n) \leq \underline{\lim} x_n \overline{\lim} y_n \leq \overline{\lim}(x_n y_n) \leq \overline{\lim} x_n \overline{\lim} y_n$.

Теорема 8. Якщо послідовності (x_n), (y_n) дійсних чисел фінально задовольняють умову $x_n \leq y_n$, то $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, y_n$, $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, y_n$.

Теорема 9. Якщо (x_n), (y_n) − послідовності дійсних чисел і $\overline{\lim}\, x_n < \underline{\lim}\, y_n$, то фінально $x_n \leq y_n$.

6. Наводимо теорему, що показує зв'язок між множиною частинних границь послідовності та множиною частинних границь її підпослідовності.

Теорема 10. Нехай (x_n) – послідовність дійсних чисел, а $\left(x_{n_k}\right)$ – її підпослідовність, тоді $L\left(x_{n_k}\right) \subset L(x_n)$, зокрема, $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, x_{n_k} \leq \overline{\lim}\, x_{n_k} \leq \overline{\lim}\, x_n$.

7. Розглянуті вище поняття верхньої і нижньої границь послідовності дають можливість формулювати ознаки збіжності числових рядів у більш загальній формі. Наведемо для прикладу формулювання найбільш популярних ознак збіжності: ознаки Даламбера, радикальної ознаки Коші та ознаки Раабе.

Ознака Даламбера. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакододатний ряд. Якщо $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд збіжний. Якщо фінально $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, ряд розбіжний. Якщо $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, ряд може бути як збіжним, так і розбіжним.

Ознака Коші. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд з невід'ємними членами і $c = \overline{\lim} \sqrt{a_n}$. Тоді:

а) якщо $c < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний;

б) якщо $c > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний;

в) якщо $c = 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ може бути як збіжним, так і розбіжним.

Ознака Раабе. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакододатний ряд, $r_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Якщо $\underline{\lim}\, r_n > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний. Якщо фінально $r_n \leq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

8. Відомо, що однією з найважливіших задач у процесі дослідження степеневого ряду є знаходження радіуса його збіжності. Завдяки поняттю верхньої границі розв'язання цієї задачі отримує вичерпне формулювання у вигляді формули Коші-Адамара.

Теорема 10. Нехай $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ – степеневий ряд, $\Lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$,

$$R = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \Lambda = +\infty, \\ \frac{1}{\Lambda}, \text{ якщо } 0 < \Lambda < +\infty, \\ +\infty, \text{ якщо } \Lambda = 0. \end{cases}$$

Якщо $R = 0$, то ряд збігається лише в точці $x = x_0$. Якщо $0 < R < +\infty$, то ряд збігається абсолютно для $\left|x - x_0\right| < R$ і розбігається для $\left|x - x_0\right| > R$. Якщо $R = +\infty$, то ряд збігається абсолютно для всіх $x \in \mathrm{R}$.

Висновки. Вивчення в курсі математичного аналізу розбіжних послідовностей та їх частинних границь сприяє:

1) більш глибокому й усвідомленому розумінню понять границі та частинної границі послідовності, природи збіжності та розбіжності;

2) дає можливість формулювати в найбільш загальному вигляді ознаки збіжності числових рядів;

3) дозволяє дати вичерпну відповідь про радіус збіжності степеневого ряду у вигляді формули Коші-Адамара;

4) розширює математичний кругозір та сприяє формуванню математичної культури студентів;

5) створює пропедевтику для вивчення ряду понять теорії функцій та інших математичних дисциплін;

6) реалізує міжпредметні та внутрішньопредметні зв'язки у курсах фундаментальних математичних дисциплін та піднімає рівень абстрактного мислення студентів на вищий щабель;

7) вивчення розбіжних послідовностей найбільш доцільно проводити одночасно і паралельно з вивченням збіжних послідовностей та їх границь.

ЛІТЕРАТУРА (REFERENCES TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – Москва: Дрофа, 2008. − 639 с.

1. Arxipov G.I. Lekciipomatematicheskomuanalizu / G.I. Arkhipov, V.A. Sadovnichij, V.N. Chubarikov. – Moskva: Drofa, 2008. − 639 s.

2. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1 / В.А. Зорич. − Москва: ФАЗИС, 1997. – 554 с.

2. Zorich V.A. matematicheskijanaliz. Chast' 1 / V.A. Zorich. − Moskva: FAZIS, 1997. – 554 s.

3. Ляшко И.И. Математический анализ Часть 1 / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, А.Ф. Калайда − Киев: Вища школа. − 1983. – 495 с.

3. Lyashko I.I. MatematicheskijanalizChast' 1 / I.I. Lyashko, A.K. Boyarchuk, Ya.G. Gaj, A.F. Kalajda − Kiev: Vishha shkola. − 1983. – 495 s.

4. Камынин Л. И. Курс математического анализа. Том 1 / Л.И. Камынин. − Москва: Изд-во МГУ, 2001. – 423 с.

4. Kamy'nin L.I. Kursmatematicheskogoanaliza. Tom 1 / L.I. Kamy'nin. − Moskva: Izd-vo MGU, 2001. – 423 s.

5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Том 1 / Л.Д. Кудрявцев − Москва: Дрофа, 2003. – 704 с.
5. Kudryavcev L.D. Kursmatematicheskogoanaliza. Tom 1 / L. D. Kudryavcev − Moskva: Drofa, 2003. – 704 s.
6. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis / W. Rudin − McGraw-Hill, 1976. − 325 Pages.

Bosovskiy M., Bochko O., Tretyak M. Study of divergent sequences in mathematical analysis course

Abstract. Most of modern textbooks on mathematical analysis do not contain material that relates to divergent sequences. However, it should be noted that the study of this material is reasonable, as evidenced by the content of textbooks on mathematical analysis leading universities. The paper considers the concept of learning divergent sequences in the course of mathematical analysis. The importance of the application of divergent sequences in different parts of the course of mathematical analysis was analyzed, as well as some of the propedeutics issues on functional analysis and theory of functions. The desirability of examining divergent sequences simultaneously and together with convergent sequences was justified. Stages of the study of divergent sequences were extracted, namely: 1) introduction of the concept of limit of a sequence in terms of neighborhoods and a set of partial limits of a sequence; 2) formulation of the main theorems; 3) introducing the basic concepts and illustration of these concepts and theorems in the examples; 4) formulation of the theorem about the transition to the upper and lower limits in the equations and inequalities; 5) formulation of the theorem, which illustrates the relationship between the partial limits of sequences and the sequences. It is shown that the study of both the parallel convergent and divergent sequences promotes a deeper and more conscious understanding of a limit of a sequence function, also makes it possible to formulate a more general form the definition of convergent series, expands the mathematical outlook, culture and worldview. Intra- and inter-subject implements the bindings in the course of the study of fundamental mathematical disciplines and raises the level of abstract thinking to a higher level.

Keywords: *mathematical analysis, divergent sequences, convergent sequences, theorem*

Босовский Н.В., Бочко О.П., Третяк Н.В.

Изучение расходящихся последовательностей в курсе математического анализа

Аннотация: Большинство современных учебников по математическому анализу не содержат материал, который касается расходящихся последовательностей. Однако следует отметить, что изучение этого материала своевременно, о чем свидетельствует содержание учебников по математическому анализу ведущих университетов. В статье представлена авторская концепция изучения расходящихся последовательностей в курсе математического анализа. Проанализировано важность вопроса применения расходящихся последовательностей в разных разделах курса математического анализа, а также пропедевтики некоторых вопросов функционального анализа и теории функций. Обосновано целесообразность изучения расходящихся последовательностей одновременно и вместе со сходящимися последовательностями. Выделены этапы изучения расходящихся последовательностей, а именно: 1) введение понятия предела последовательности в терминах окрестностей и множества частичных пределов числовой последовательности; 2) формулирование основных теорем; 3) введение основных понятий и иллюстрация введенных понятий и теорем на примерах; 4) формулирование теоремы о переходе к верхнему и нижнему пределу в равенствах и неравенствах; 5) формулирование теоремы о связи между множествами частичными пределов последовательности и ее подпоследовательности. Показано, что изучение одновременно и параллельно сходящихся и расходящихся последовательностей содействует более глубокому и сознательному пониманию предела последовательности. Введение понятий нижнего и верхнего пределов последовательности дает возможность формулировать в наиболее общем виде признаки сходимости числовых рядов, расширяет математический кругозор иразвивает математическую культуру студентов, реализует внутрипредметные и межпредметные связи в процессе изучения фундаментальных математических дисциплин и поднимает уровень абстрактного мышления на более высокий уровень.

Ключевые слова: *математический анализ, расходящиеся последовательности, сходящиеся последовательности, теорема*