Бомба А.Я., Вострiков В.П.

Математичне моделювання процесу нагрівання середовища «грунт-повітря» лінійними джерелами тепла

Бомба Андрій Ярославович, доктор технічних наук, професор
Востріков Володимир Петрович, кандидат технічних наук, доцент,
Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, Україна

Анотація. Запропоновано математичні рівняння та розраховано температурне поле кусково-однорідного середовища «ґрунт-повітря», що обігрівається лінійними джерелами тепла. Проведено аналіз їх розташування та отримано співвідношення для знаходження оптимальної глибини залягання обігрівача та його необхідної температури за умови сталої температури на заданій висоті.

Ключові слова: *математичне моделювання, нагрівання, середовище «ґрунт-повітря», лінійні джерела тепла, розрахункова область, тепловий потік.*

Вступ. На даний час задачі прогнозування процесів нагрівання середовищ, зокрема ґрунту, пластинами, трубами, точковими джерелами тепла тощо є досить актуальними в будівельному виробництві та сільськогосподарській практиці. У сільському господарстві для теплової меліорації ґрунтів використовують системи повітряного, поверхневого чи внутрішньогрунтового обігріву з використанням оболонок-рукавів, трубопроводів, електричних кабелів тощо.

Актуальним є клас задач із розрахунку температурного поля у декількох, різних за властивостями середовищ, зокрема в середовищах «ґрунт-повітря» та на їх межі. Причому, з метою економії певних затрат, окрім традиційних постановок задач на розрахунок температурних полів, виникає необхідність оптимізації тих чи інших параметрів процесу теплопередачі та знаходження оптимальної температури джерела тепла та оптимальних параметрів систем обігріву.

Огляд публікацій. Задачі на розрахунок температурних полів у різних за властивостями середовищах, зокрема в ґрунті та приземному шарі повітря, розглядались у багатьох роботах. При цьому використовуються математичні залежності, що ґрунтуються на законах теплопровідності. Стаціонарний процес нагрівання пористих середовищ, зокрема ґрунту інженерними лінійними засобами, розглядався в роботах А.В. Ликова [5], А.В. Куртенера і А.Ф. Чудновського [3], С.С. Кутателадзе [4], И.А. Иоффе [2] та інші. Проте в цих та інших роботах недостатньо повно розглянуто математичне моделювання процесу теплопередачі для варіанту розташування лінійних джерел тепла на поверхні ґрунту, що має важливе значення для систем поверхневого обігріву, а також недостатньо враховані можливості впливу характеристик процесу на характеристики середовища.

Мета роботи. Метою роботи є розроблення математичних залежностей та проведення розрахунку температурного поля у поперечному перерізі кусково-однорідного середовища «ґрунт-повітря» при обігріві його лінійними джерелами тепла, розташованими у різних місцях середовища.

Матеріали і методи. Розв'язок поставленої задачі було виконано нами з використанням математичного апарату закону теплопровідності та рівняння нерозривності за А.В. Куртенером і А.Ф. Чудновським [4, 5], методів чисельного розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення [1, 7, 8], а числові розрахунки за допомогою комплексу програм MATLAB [9].

Результати та їх обговорення. Для виведення необхідних математичних залежностей розглянемо стаціонарний двовимірний процес нагрівання кусково-однорідного нескінченно великих розмірів середовища «грунт-повітря»
$G=\{(x,y,z):-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<\infty,\ -\infty<z<+\infty\}$
паралельно розміщеними в ґрунті джерелами тепла. Розв'язок задачі шукатимемо у площині поперечного перерізу, де труби (джерела тепла) інтерпретовані точками. Припустимо, що межею спряження областей ґрунту і повітря є пряма лінія, а ґрунтове і повітряне середовища характеризуються відповідно коефіцієнтами теплопровідності $k(x,y)=k_1$, при $y>0$ та $k(x,y)=k_2$, при $y<0$. Оберемо координатні осі Ox та Oy так, щоб вісь Ox співпала з цією лінією. Тоді рівняння межі $\Gamma=\{x=0,\ y\in(-\infty,+\infty)\}$. Приймаємо, що джерела тепла розміщені на однаковій відстані одне від одного в точках $(ml,-y_0)$, $m=0,\pm1,\pm2,...$ і являються витоками тепла. Точки (ml,a), $m=0,\pm1,\pm2,...$ відповідно будемо вважати втоками тепла (див. рис.1). Розрахункова, плоска область G_z, матиме вид:

$$G_z=\{z=x+iy:-\infty<x<+\infty,\ 0<y<+\infty,\ k=k_2,-\infty<y<0,\ k=k_1\}.$$

Процес теплопровідності описуємо на основі закону теплопровідності та рівняння нерозривності:

$$\vec{q}_i=-k_i\,gradT,\quad i=1,2,\quad div\vec{q}_i=0,\qquad (1)$$

де $T=T(x,y)$ – температура в точці (x,y), k_i, $i=1,2$ - коефіцієнти теплопровідності відповідно у двох Вважаємо відомими наступні параметри: T^* - температура на джерелі тепла
$(T|_{y=-b,x=ml}=+\infty,\quad m=-\infty,+\infty)$,
$T|_{y=L;\ -\infty<x<+\infty}=T_*=const$ - температура на висоті L від поверхні ґрунту, Q - повний тепловий потік, l – відстань між джерелами тепла, b - глибина залягання джерел тепла ($l,\ b$ - невідомі величини, ке-

руючі параметри), T_*^* - мінімально допустима температура, що необхідна для виробничих умов на деякій (заданій) висоті L^*.

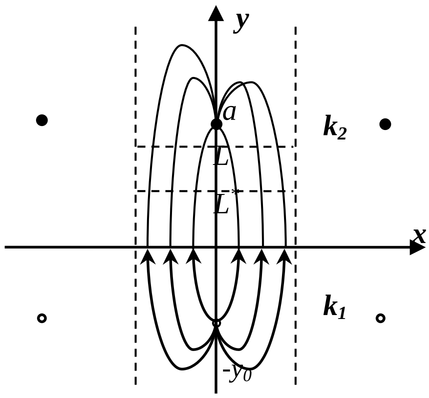

Рис. 1. Розрахункова область задачі

Задача, що розглядається нами, полягає у розрахунку температурного поля (температури, питомої витрати, динамічної сітки тощо) у області G_z та знаходженні мінімального із можливих значень параметру y_0, щоб температура *T=T(x,y)* у зазначеній області $G_z^0 = \left\{ z = x + iy : -\infty < x < +\infty,\ 0 < y < L^* \right\}$ була не меншою заданого її значення T_*^* (тобто $T(x,y) \geq T_*^*$), при умові, що потрапляння тепла вглиб ґрунту Q_0 не перевищувала деякого значення Q_0^0, а також потрібно визначити необхідну температуру на джерелі тепла, за умови сталого значення температури на висоті *L*.

Розрахункові формули. Введемо тепловий потенціал $\varphi = \varphi(x,y)$ за формулою $\varphi = k_i \dfrac{-T + T_*}{T^* - T_*}$ та функцію течії $\psi = \psi(x,y)$ (комплексно спряжену до $\varphi(x,y)$). Температуру на джерелі задамо на еквіпотенціальній лінії, що проходить через точки $\overline{y_0}$ та $\underline{y_0}$, при чому $\left|\overline{y_0} - y_0\right| < \varepsilon$ та $\left|\underline{y_0} - y_0\right| < \varepsilon$.

У випадку кусково-однорідного середовища розділеного віссю Ox на дві зони, що характеризуються двома сталими коефіцієнтами k_1, k_2 та інтенсивністю *Q* двох точкових джерел (витоку та втоку розміщених відповідно в точках *(0,a)* та *(0,-b)*, відповідний процес описується рівняннями $v_{jx} = k_j \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi_j}{\partial y}$, $v_{jy} = k_j \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi_j}{\partial x}$ та умовами спряження вздовж прямої $y = 0$ [8,10], де $\varphi_1(x,y),\ \varphi_2(x,y),\ \psi_1(x,y),\ \psi_2(x,y)$ - теплові потенціали та функції течії відповідно у верхній та нижній півплощинах, маємо:

$$\varphi_1(x,y) = \frac{Q}{2\pi}\left(\ln\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \ln\sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right),$$
$$\psi_1(x,y) = \frac{Q}{2\pi}\left(arctg\,\frac{y-y_0}{x-x_0} + arctg\,\frac{y+y_0}{x-x_0} + s(x-x_0, y-y_0) + s(x-x_0, y+y_0) \right),$$
$$\varphi_2(x,y) = \frac{k_2 Q}{\pi(k_1+k_2)} \ln\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$
$$\psi_2(x,y) = \frac{k_2 Q}{\pi(k_1+k_2)}\left(arctg\,\frac{y-y_0}{x-x_0} + s(x-x_0, y-y_0) \right). \tag{2}$$

Якщо $k(x,y) = k_1\ (k_2)$ при $y < 0\ (y > 0)$; у точках (ml, y_0), $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, розміщені витоки однакових інтенсивностей Q, то потенціали $\varphi_1(x,y)$ та $\varphi_2(x,y)$ (відповідно нижньої та верхньої півплощин) згідно принципу суперпозиції одержимо у вигляді:

$$\varphi_1(x,y) = \frac{Q}{2\pi}\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln\sqrt{(x-mx_0)^2 + (y-y_0)^2} + \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln\sqrt{(x+mx_0)^2 + (y-y_0)^2} \right),$$
$$\varphi_2(x,y) = \frac{k_2 Q}{\pi(k_1+k_2)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln\sqrt{(x-mx_0)^2 + (y-y_0)^2}. \tag{3}$$

Вимагаючи виконання нерівності $T(x,y) \geq T_*^*$ проходимо до таких рівнянь для знаходження параметру

$$y_0 : \frac{Q(T^* - T_*)}{2\pi k_1(-T_*^* + T_*)}\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln\sqrt{(x-mx_0)^2 + (y-y_0)^2} + \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln\sqrt{(x+mx_0)^2 + (y-y_0)^2} \right) = 0,$$

якщо джерело знаходиться в нижній півплощині,

та $\dfrac{Q(T^* - T_*)}{\pi(-T_*^* + T_*)(k_1+k_2)} \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln\sqrt{(x-mx_0)^2 + (y-y_0)^2} = 0$, якщо джерело знаходиться в верхній півплощині.

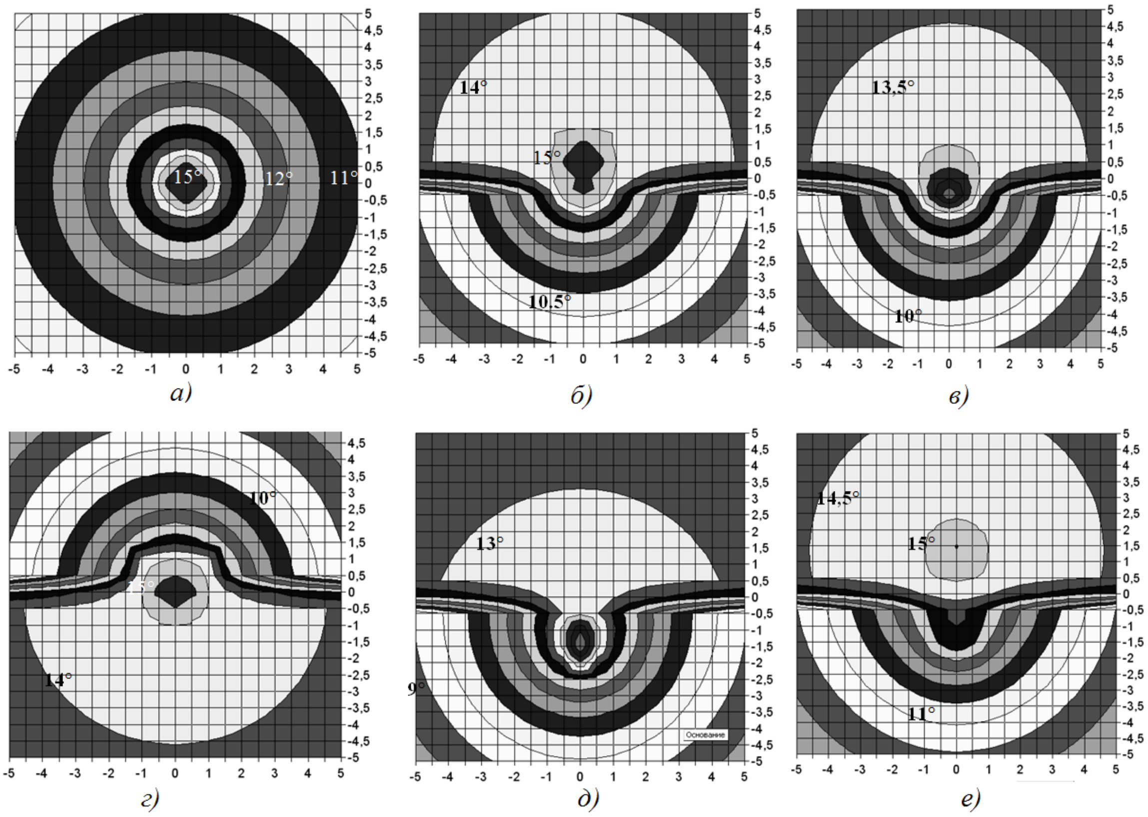

Рис. 2. Розподіл температур при різному розміщенні джерела тепла

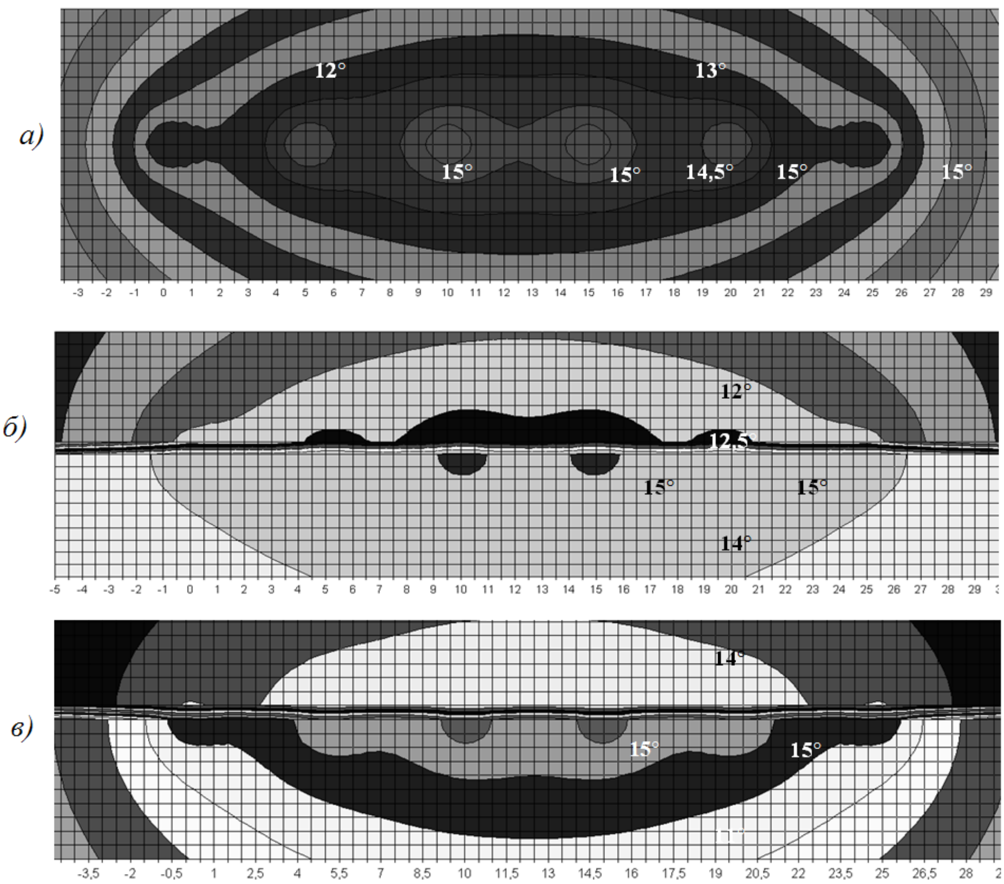

Рис. 3. Розподіл температур при обігріві ґрунту шістьма джерелами тепла

Числові розрахунки за допомогою комплексу програм MATLAB [9] були проведені для коефіцієнта теплопровідності повітря $k_1 = 0,026$ та для різних типів ґрунтів: 1) піщаний ґрунт $k_2 = 1,16$ 2) ґрунт, в якому 10% води $k_2 = 1,75$; 3) ґрунт, в якому 20% води $k_2 = 2,1$; Температура на висоті $L = 50$ рівна $T_* = 30$, джерела тепла розміщені на глибині $y_0 = 10$, відстань між джерелами тепла $l = 10$.

Одержані результати у вигляді ізотермічних областей представлені на рис. 2. Розрахунки показали таке: у випадку піщаного ґрунту для досягнення необхідної температури на висоті L температура на джерелі повинна бути найбільшою ($T^* \approx 66$), якщо маємо 10% води в ґрунті, то $T^* \approx 54$, і якщо 20% води, то $T^* \approx 49$.

При $l = 10$, $T_* = 30$, $T_*^* = 35$, $T^* = 50$, $Q = 1$, отримаємо відповідне оптимальне значення залягання джерела тепла, яке становитиме $y_0 = 9,8$. Зі збільшенням ширини між джерелами тепла глибина залягання нагріваючого джерела зменшується, а саме: якщо $l = 12,\ \ 14$, то $y_0 = 9.26,\ \ 8.98$ відповідно.

На рис. 2 зображені ізотермічні області у випадках: а) коефіцієнти провідності у двох досліджуваних середовищах рівні, а саме $k_1 = k_2 = 1,16$ (нагрівник знаходиться в піщаному ґрунті); б) джерело тепла знаходиться на поверхні ґрунту; в) нагрівник наполовину знаходиться в ґрунті, $k_1 > k_2$; г) нагрівник наполовину знаходиться в ґрунті, $k_1 < k_2$; д) джерело тепла повністю знаходиться під поверхнею ґрунту; е) джерело тепла розміщене в повітрі на деякій висоті.

На рис. 3 зображені ізотермічні області у випадку обігріву середовища «ґрунт-повітря» серією джерел тепла за умов: а) $k_1 = k_2$; б) $k_1 > k_2$; в) $k_1 < k_2$.**Висновки.** Одержано аналітичні рівняння для розрахунку температури ґрунту і повітря при стаціонарному процесі нагрівання, які можуть бути використані для наближених розрахунків і аналізу теплових процесів у кусково-однорідному середовищі «ґрунт-повітря». Проведено числові розрахунки і знайдено температурне поле у вигляді ізотермічних областей для різних випадків розташування лінійних джерел тепла.

Запропонована методологія постановки та розрахунку задач теплопровідності в ґрунті та в середовищі «ґрунт-повітря» дозволяє не тільки розрахувати температурний режим, але й оптимізувати певні параметри джерел тепла та розрахункової області. Побудований алгоритм розв’язання модельної задачі теорії теплопровідності дозволяє враховувати зворотній вплив характеристик процесу на характеристики середовища.

ЛІТЕРАТУРА (REFERENCES TRANSLATED AND TRNSLITERATED)

1. Бомба А.Я., Каштан С.С. Чисельне розв’язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // Волинський математичний вісник. - 2001.- Вип. 8.- С. 9-22.

Bomba A.Y., Kashtan S.S. Chyselne rozviazanna obernenykh neliniinykh kraijvykh zadach na konformni ta kvazikonformni vidobrazhennia [Numerical solution of inverse nonlinear boundary value problems for conformal and quasi-conformal reflections] // Volynskii matematichnii visnik. - 2001.- Vip. 8.- S. 9-22.

2. Иоффе И.А. О стационарном теплообмене в почве, обогреваемой системой трубопроводов. // Сб. трудов по агрономической физике. - Л.: 1971. Вып. 3. - С. 58-62.

Ioffe I.A. O stazionarnom teploobmene v pochve, obogrevaemoi sistemoi truboprovodov [On the stationary heat transfer in soil heated piping system] // Sb. trudov po agronomicheskoi fizike. - L.: 1971.- Vip.3 - S. 58-62.

3. Куртенер Д.А., Чудновський А.Ф. Агрометеорологические основы тепловой мелиорации почвы.- Ленинград: Гидрометеоиздат,1979. - 231с.

Kurtener D.A., Chudnovskii A.F., Agrometeorologicheskie osnovi teplovoi melioratsii pozhvi [Agrometeorological basis thermal of thermal land- reclamation of soil] - Leningrad: Gidrometeoizdat,1979. – 231s.

4. Кутателадзе С.С., Рабинович А.Л. Расчет почвенного обогрева теплиц // Отопление и вентиляция. - 1935. № 12. - С. 24-26.

Kutateladze S.S., Rabinovich A.L. Raschet pochvenogo obogreva teplits [Calculation of soil heating greenhouses] // Отопление и вентиляция. - 1935. № 12. - С. 24-26.

5. Лыков А.В. Тепломасообмен. - М.: Энергия, - 1970. - 560с.

Likov A.V. Teplomasoobmen [Heat-mass transfer] - M.: Energi, - 1970. - 560 s.

6. Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.- Москва: Мир, 1975.- 558 с.

Ortega D., Reinboldt V. Iteratsionnie metodi reshenii nelineinikh sistem uravnenii so mnogimi neizvestnimi [Iterative methods for solving systems of nonlinear equations with many unknowns] - Moskva: Mir, 1975.- 558 s.

7. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функции комплексного переменного в задачах физики и техники.- Москва: Высшая школа, 1983. - 161 с.

Radigin V.M., Golubeva O.V. Primenenii funktsii kompleksnogo peremennogo v zadachakh fiziki i tekhniki [Application of function complex variable in the tasks of physics and technique] - Moskva: Visshai shkola, 1983. - 161 s.

8. Самарский А.А., Бабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. - Москва, 2003. - 782с.

Savarski A.A., Babishshevich P.N., Vichislitelnai teploperedacha [Computational Heat Transfer] - Moskva, 2003. - 782c.

9. Чарльз Генри Эдвардс, Дэвид Э. Пенни. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. 3-е издание. - Киев.: Диалектика-Вильямс, 2007.

Carlz Genri Edvars, Dtvid E. Penni. Difftrentsislnie uravnenii i kraevie zadach: modelirovanie i vichislenie s pomoshchiu Mathematica, Maple и MATLAB [Differential equations and boundary value problems: modeling and calculation by means Mathematica, Maple and MATLAB]. - 3-e izdanie. - Kiev.: Dialektika-Viliams, 2007.

Bomba A.Y., Vostrikov V.P.

Mathematical design of process of heating of environment "soil - air" by the linear sources of heat

Abstract. The aim of work is development of mathematical equations that describe the process of stationary heat conductivity and allow to expect the temperature field in the cross section of environment "soil - air" at her heating by the linear pipeline sources of heat and to optimize the parameters of sources of heat. The decision of task is executed with the use of mathematical vehicle of law of heat conductivity, equations of indissolubility and methods of numeral decision of reverse nonlinear regional tasks on conformal and quasi-conformal reflections. In the derivation of mathematical equations the process of heating of piece-homogeneous environment is considered "soil-air" infinitely largenesses with the sources of heat accommodated in parallel in soil. Thus the sources of heat are interpreted by points. The calculation area of task is certain as a piece-homogeneous environment with the line of division on the surface of soil as a straight line. Soil and air environment are characterized the considerably differing permanent coefficients of heat conductivity. The sources of heat are interpreted by the points placed on identical distance in soil (on soil), and in mid air, accordingly, the flows of heat are interpreted as the symmetrically placed points. Mathematical transformations are get equations for determination of values of thermal potentials and thermal streams in overhead and lower semi planes of calculation area. The equations are got for determination of height of placing of sources of heat for providing of the set temperature of air. Calculations are conducted with the use of complex of the programs of MATLAB and results are got as isothermal areas of distribution of temperatures at the different placing of sources of heat on a depth and at heating of soil by six sources of heat, placed on her surface. Offer methodology of formulation and calculation of tasks of heat conductivity in an environment "soil-air" allows to expect the temperature condition of environment and optimize the parameters of sources of heat and calculation area, and also to take into account reverse influence of descriptions of process of heat transfer on descriptions of calculation environment.

Keywords: *mathematical design, heating, an environment is "soil-air", linear sources of heat, calculation area, thermal stream.*

Бомба А.Я., Востриков В.П. Математическое моделирование процесса нагревания среды «почва-воздух» линейными источниками тепла

Аннотация. Целью работы является разработка математических уравнений, которые описывают процесс стационарной теплопроводности и позволяют рассчитать температурное поле в поперечном сечении среды «почва-воздух» при ее обогреве линейными трубопроводными источниками тепла и оптимизировать параметры источников тепла. Решение задачи выполнено с использованием математического аппарата закона теплопроводности, уравнения неразрывности и методов численного решения обратных нелинейных краевых задач по конформным и квазиконформным отображениям. При выводе математических уравнений рассмотрено процесс нагревания кусочно-однородной среды «почва-воздух» бесконечно больших размеров с параллельно размещенными в почве источниками тепла. При этом источники тепла интерпретированы точками. Расчетная область задачи определена в виде кусочно-однородной среды с линией раздела на поверхности почвы в виде прямой линии. Почвенная и воздушная среда характеризуются значительно разнящимися постоянными коэффициентами теплопроводности. Источники тепла интерпретированы точками, размещенными на одинаковом расстоянии в почве (на почве), а в воздухе, соответственно, интерпретированы стоки тепла в виде симметрично размещенных точек. Математическими преобразованиями получены уравнения для определения значений тепловых потенциалов и тепловых потоков в верхней и нижней полуплоскостях расчетной области. Получены уравнения для определения высоты размещения источников тепла для обеспечения заданной температуры воздуха. Проведены расчеты с использованием комплекса программ MATLAB и получены результаты в виде изотермических областей распределения температур при разном размещении источников тепла по глубине и при обогреве почвы шестью источниками тепла, размещенных на ее поверхности. Предложенная методология постановки и расчета задач теплопроводности в среде «почва-воздух» позволяет рассчитать температурный режим среды и оптимизировать параметры источников тепла и расчетной области, а также учитывать обратное влияние характеристик процесса теплопередачи на характеристики расчетной среды.

Ключевые слова*: математическое моделирование, нагревание, линейные источники тепла, расчетная область, тепловой поток, среда «почва-воздух».*