Бобылев Д.Е.[1]

Организация эвристической деятельности студентов при изучении функционального анализа (на примере темы «Принцип сжимающих отображений и его применение»)

[1] *Бобылев Дмитрий Евгеньевич, старший преподаватель кафедры математики и методики ее преподавания Криворожский национальный университет, г. Кривой Рог, Украина*

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы усовершенствования методики обучения функциональному анализу путем организации эвристической деятельности студентов. Показаны основные приемы управления данной деятельностью при изучении темы «Принцип сжимающих отображений» в аудиторной и внеаудиторной работе студентов. На примере теоремы Банаха предложены эвристические предписания, которые целесообразно использовать в процессе ее доказательства. После изучения темы студенты должны выполнить две интегрированные лабораторные работы, составленные исходя из междисциплинарной связи между функциональным анализом и вычислительной математикой и в процессе выполнения которых студенты устанавливают зависимость коэффициента сжимания и скорости сходимости итерационного процесса.

Ключевые слова: *эвристическая деятельность, функциональный анализ, принцип сжимающих отображений.*

Введение. Математическое образование в высшей школе Украины должно соответствовать требованиям социокультурной среды, предъявляемым к формированию личности студента. Это предполагает развитие у студентов эвристических умений, которые позволяют находить нестандартные решения, переключать внимание с одной части проблемы на другую, оперировать приемами эвристической деятельности. Между тем данному аспекту уделяется недостаточно внимания в процессе обучения в высшей школе математических дисциплин, в том числе и в высшей педагогической школе. Подготовка будущего учителя математики должна соответствовать новым требованиям к формированию их профессиональных компетентностей. То есть при организации учебного процесса по математическим дисциплинам в педагогических университетах в современных условиях необходимо ориентироваться на подготовку будущего учителя математики способного умело управлять как учебно-познавательной, так и эвристической деятельностью школьников [4]. Для этого важно найти более эффективные технологии обучения математическим дисциплинам, пересмотреть структуру и содержание математической подготовки будущих учителей математики, с учетом использования эвристик.

К нормативным математическим дисциплинам, изучаемым в высшей педагогической школе, относится курс функционального анализа, методика преподавания которого изучена не в полной мере. Функциональный анализ является заключительным среди курсов анализа (математического и комплексного). Он содержит большие возможности привития студентам интереса к творческому поиску, воспитания желания анализировать, проводить аналогии, сопоставлять, делать предположения, выдвигать гипотезы и т.п. Однако без планового управления эвристической деятельностью на занятиях функционального анализа студенты не только не будут сознательно воспринимать учебный материал и понимать его, но не смогут воспроизвести изученное в нестандартных ситуациях. Поэтому одним из направлений совершенствования методики преподавания данного курса является организация эвристической деятельности, поскольку такая деятельность в более полной мере готовит будущего учителя математики к профессиональной деятельности.

Обзор публикаций. Проблеме реализации эвристических идей, организации эвристической деятельности и управлению ею в обучении будущих учителей математики уделяли внимание такие украинские исследователи как М.И. Бурда, В.Г. Моторина, Г.А. Михалин, Е.И. Скафа, З.И. Слепкань, Н.А. Тарасенкова, Ю.Г. Тымко, О.В. Тутова и др. Авторами в основном рассмотрены проблемы методической подготовки студентов-математиков и сделан акцент на формировании приемов эвристической деятельности, овладении эвристическими умениями у студентов в методических курсах. Однако, как отмечает Е.И. Скафа [5], изучение эвристики как общей методологии творчества и как системы отдельных приемов решения нестандартных задач является необходимым компонентом всей системы подготовки будущего учителя математики. Такая подготовка должна быть непрерывной в течение всех лет обучения. Она должна пронизывать цикл нормативных математических и методических дисциплин, специальных курсов, подкрепляться курсовыми и дипломными работами.

Поэтому целесообразно остановиться на проблеме формирования эвристических приемов у студентов-математиков в курсе функционального анализа.

Целью статьи является раскрытие некоторых приемов управления эвристической деятельностью будущих учителей математики при изучении курса функционального анализа на примере темы «Принцип сжимающих отображений и его применение».

Результаты. Рассматривая процесс организации эвристической деятельности студентов, будущих учителей математики, следует учитывать, что в высшей педагогической школе на основе теории учебной, профессиональной, эвристической деятельности введено понятие профессионально ориентированной эвристической деятельности студентов [8]. Анализируя это понятие, мы пришли к заключению о том, что процесс учебной работы по курсу функционального анализа необходимо перестроить с учетом организации такой деятельности. Нами рассматривается ***профессионально ориентированная эвристическая деятельность студентов по функциональному анализу*** *как особый вид учебной деятельности, направленный на создание новой стратегии или системы действий в процессе решения нестандартных задач курса, вследствие чего студенты активно овладева-*

ют предметными и методическими знаниями, овладевают эвристическими приемами, развивают эвристические умения и личностные качества будущего специалиста.

Таблица 1

Эвристическая схема доказательства теоремы С. Банаха

Формулировка условия теоремы и этапов доказательства	**Эвристические предписания**
В полном метрическом пространстве сжимающее отображение имеет одну и только одну неподвижную точку	
I этап доказательства. *Построение последовательности*	1. Выделите, что известно из условия теоремы и что нужно доказать. 2. С чего нужно начать доказательство теоремы?
Возьмем произвольный фиксированный элемент $x \in X$ и положим $x_1 = Ax$, $x_2 = Ax_1, \ldots, x_n = Ax_{n-1}, \ldots$.	Зависит ли построенная последовательность от выбора первоначальной точки?
II этап доказательства. *Доказательство, что построенная последовательность является фундаментальной*	Для доказательства, что построенная последовательность является фундаментальной, воспользуйтесь определением фундаментальной последовательности. Но в определении рассматривается расстояние между двумя произвольными точками. Каким образом можно зафиксировать данное расстояние?
Покажем, что построенная последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Для этого заметим, что $\rho(x_1, x_2) = \rho(Ax, Ax_1) \le \alpha\rho(x, x_1) = \alpha\rho(x, Ax)$, $\rho(x_2, x_3) = \rho(Ax_1, Ax_2) \le \alpha\rho(x_1, x_2) = \alpha^2\rho(x, Ax)$, ………………………………………….. $\rho(x_n, x_{n+1}) \le \alpha^n\rho(x, Ax)$, ………………………………………….. Далее, $\rho(x_n, x_{x+p}) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \le$ $\le \alpha^n(1 + \alpha + \ldots + \alpha^{p-1})\rho(x, Ax) = \dfrac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(x, Ax)$. Так как по условию $0 < \alpha < 1$, то $\rho(x_n, x_{n+p}) < \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x, Ax)$, откуда в свою очередь следует, что $\rho(x_n, x_{n+p}) \to 0$ при $n \to \infty$ и любом $p > 0$. Значит, последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной. В силу полноты пространства X существует элемент $x_0 \in X$, являющийся пределом этой последовательности, $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.	На что указывает закономерность изменения коэффициента метрики $\rho(x, Ax)$ и неравенство, следующее из определения сжимающего отображения, $0 < \alpha < 1$?
III этап доказательства. *Докажем, что граница построенной последовательности является неподвижной точкой*	
Докажем, что $Ax_0 = x_0$. В самом деле, $\rho(x_0, Ax_0) \le \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, Ax_0) =$ $\rho(x_0, x_n) + \rho(Ax_{n-1}, Ax_0) \le \rho(x_0, x_n) + \alpha\rho(x_{n-1}, x_0)$. Так как $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n $\rho(x_0, x_n) < \varepsilon/2$, $\rho(x_0, x_{n-1}) < \varepsilon/2$. Следовательно, $\rho(x_0, Ax_0) < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует, что $\rho(x_0, Ax_0) = 0$, т.е. $x_0 = Ax_0$.	1. Можно ли доказать, что граница построенной последовательности является неподвижной точкой исходя из алгоритма построения последовательности $x_n = Ax_{n-1}$? 2. Какую лемму необходимо для этого доказать?
IV этап доказательства. *Доказательство единственности неподвижной точки*	Какой способ использовать для доказательства единственности?
Докажем единственность неподвижной точки у оператора сжатия. Предположим, что существует два элемента x_0, $y_0 \in X$ такие, что $Ax_0 = x_0$, $Ay_0 = y_0$. Тогда $\rho(x_0, y_0) = \rho(Ax_0, Ay_0) \le \alpha\rho(x_0, y_0)$. Если допустить, что $\rho(x_0, y_0) > 0$, то из предыдущего следует, что $\alpha \ge 1$. Но это противоречит условию $\alpha < 1$. Значит, наше допущение, что $\rho(x_0, y_0) > 0$, неверно и $x_0 = y_0$.	Как, исходя из аксиом метрического пространства, доказать, что две, предполагаемо разные, неподвижные точки совпадают.

На примере темы «Принцип сжимающих отображений» рассмотрим методику организации и управления профессионально ориентированной эвристической деятельностью студентов по функциональному анализу.

Принцип сжимающих отображений изложен в теореме С. Банаха. При подготовке преподавателя к лекции по данной теме целесообразно каждый этап доказательства теоремы Банаха сопроводить эвристическими предписаниями, построение которых описано в работах Дж.Пойа [2; 3]. Создав схему доказательства теоремы, как показано в таблице 1, преподаватель может предложить ее студентам на лекции. Это позволяет не только активизировать работу студентов в процессе поиска доказательства, но и позволяет им овладевать эвристическими приемами мыслительной деятельности: анализ, синтез, сравнение, абстрагирование, обобщение, аналогия, и подведение под понятие.

После доказательства теоремы необходимо поставить вопросы, которые позволят студентам более глубоко понять ее суть (можно организовать эвристическую беседу).

Например: “Почему условие $\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y)$ ($0 < \alpha < 1$) нельзя заменить на более «слабое» $\rho(Ax, Ay) \le \rho(x, y)$?” (*)

В процессе ответа на вопрос преподаватель рассуждает вместе со студентами.

В самом деле, пусть $X = R^1$ – множество действительных чисел с естественной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ и пусть $Ax = \frac{\pi}{2} + x - arctgx$. Нетрудно видеть, что неподвижных точек у оператора A нет: уравнение $x = Ax$, определяющее неподвижные точки оператора A, в данном случае принимает вид $x = \frac{\pi}{2} + x - arctgx$ и решений не имеет. Вместе с тем, используя теорему Лагранжа, получаем

$$\rho(Ax, Ay) = |Ax - Ay| = \left|\frac{\pi}{2} + x - arctgx - \frac{\pi}{2} - y + arctgy\right| = |x - y - (arctgx - arctgy)| =$$

$$= \left|x - y - \frac{1}{1+\xi^2}(x - y)\right| = \frac{\xi^2}{1+\xi^2}|x - y| < \rho(x, y),$$

т.е. условие (*) выполняется.

Рассматривая применение принципа сжимающих отображений необходимо сначала проиллюстрировать первый этап доказательства теоремы при решении итерационным методом уравнений с одной переменной. После чего перейти к доказательству теоремы Коши с помощью теоремы Банаха. В конце доказательства целесообразно предложить студентам разобрать доказательство этой же теоремы, не используя теорему Банаха (например, предложенное в классическом учебнике В. В. Степанова [7]). И уже на практическом занятии сравнить теорему Банаха и два способа доказательства теоремы Коши. На основании этого сравнения сформировать эвристическую схему для доказательства теорем существования и единственности решения алгебраических, дифференциальных, интегральных и других функциональных уравнений сформулированную в 1922 г. С. Банахом.

Как отмечает З. И. Слепкань [6], по мере сформированности у обучаемых основных компонентов умения доказывать теорему и решать задачи на доказательства, учащимся полезно предложить общую эвристическую схему доказательства любого математического утверждения.

Таким образом, будущие учителя математики могут самостоятельно понять, что принцип сжимающих отображений является функционально-геометрической обработкой идеи Пикара – метода последовательных приближений и, что большое достоинство этого принципа состоит в том, что он не только гарантирует при определенных условиях однозначную разрешимость уравнения, но и может служить для получения приближенных решений.

Во внеаудиторное время студенты выполняют лабораторные работы. В двух лабораторных работах (№ 1 – «Решение методом итераций уравнений с одной переменной», № 2 – «Решение методом итераций систем линейных алгебраических уравнений») показано применение функционального анализа в вычислительной математике – разделе математики, в котором изучаются теории численных методов решения типовых математических задач и проводится изучение и сравнительный анализ методов решения типовых задач. Важным элементом этого анализа является поиск экономичных методов, позволяющих получить результат, используя наименьшее число операций, оптимизация методов решения. Для задач больших размеров особенно важным является исследование устойчивости методов и алгоритмов, в том числе к ошибкам округления. Методические указания к лабораторным работам [1] позволят студентам построить последовательные приближения $\{x_n\}$, сходящихся к неподвижной точке x_0 и убедиться в том, что можно начинать итерационный процесс с любого элемента $x \in X$ и, что выбор элемента x будет сказываться лишь на скорости сходимости $\{x_n\}$.

Выводы. Для качественной подготовки учителя к организации и управлению эвристической деятельностью учащихся особенное значение приобретает организация профессионально ориентированной эвристической деятельности в курсе функционального анализа. Показаны некоторые приемы управления данной деятельностью при изучении темы «Принцип сжимающих отображений» при аудиторной и внеаудиторной работе студентов. На примере теоремы Банаха предложены эвристические предписания, которые целесообразно использовать в процессе доказательства. Во время лабораторных работ, которые составлены исходя из междисциплинарной связи между функциональным анализом и вычислительной математикой, студенты устанавливают зависимость коэффициента сжимания и скорости сходимости итерационного процесса.

ЛИТЕРАТУРА
(REFERENCES TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Бобилєв Д.Є. Методичні вказівки до проведення лабораторних робіт з функціонального аналізу / Д. Є. Бобилєв. – Кривий Ріг: КДПУ, 2004. – 40 с.
Bobyliev D. Metodichni vkazivki do provedenia laboratornih robit z functionalnogo analizu [Methodological guidelines for laboratory works on functional analysis]. – Kryvyi Rig: KDPU, 2004. – 40 p.

2. Пойа Дж. Математическое открытие / Дж. Пойа. – 2-е изд. – М.: Наука, 1976. – 448 с.

Polya G. Matematicheskoe otkritie [Mathematical discovery]. – M.: Nauka, 1976. – 448 p.

3. Пойа Дж. Математика и правдоподобные рассуждения / Дж. Пойа. – М.: Наука, 1975. – 464 с.

Polya G. Matematika i pravdopodobnie rassugdenia [Mathematics and plausible reasoning]. – M.: Nauka, 1975. – 464 p.

4. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография / Е. И. Скафа. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. – 439 с.

Skafa E.I. Evristicheskoe obuchenie matematike: teoria, metodika, techologia [Heuristic teaching of mathematics: theory, methodology, technology]. Monograph. – Donechk: Izd-vo DonNU, 2004. – 439 p.

5. Скафа О. І. Евристична складова сучасної підготовки майбутнього вчителя математики / О. І. Скафа // Матеріали Всеукраїнської наук.-методичної конф. "Стан та перспективи підготовки вчителя математики в Україні". – Вінниця: Планер, 2009. – С. 6-8.

Skafa O. I. Evristichna skladova suchasnoi pidgotovki maibutniogo vchitelia matematiki [Heuristic constituent of modern preparation of future teacher of mathematics] // Materiali Vseukrainskoi nauk.-metodichoi konf. "Stan ta perspektivi pidgotovki vchitelia matematiki v ukraini". – Vinnicha: Planer, 2009. – P. 6-8.

6. Слєпкань З.І. Методика навчання математики / З.І. Слєпкань. – К.: Вища школа, 2006. – 582с.

Slepkan Z.I. Metodika navchania matematiki [Methods of Teaching Mathematics]. – K.: Visha shkola, 2006. – 582 p.

7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – 8 изд. – М.: Физматлит, 1959. – 473 с.

Stepanov V.V. Kurs differenchialnich uravnenii [The course of differential equations]. – M.: Физматлит, 1959. – 473 с.

8. Тымко Ю.Г. Методическая система формирования профессионально ориентированной эвристической деятельности будущего учителя математики: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Ю.Г. Тымко. – Черкассы, 2012. – 244 с.

Tymko Yu.G. Metodicheskaya systema formirovania professionalno orientirovannoi evristicheskoi deiatelnosti budushego uchitelia matematiki [Methodical system of forming professionally oriented heuristic activity of future teacher of mathematics]: thesis ... candidate of pedagogical sciences, specialty 13.00.02 / Yu.G. Tymko. – Cherkassy, 2012. – 244 p.

Bobyliev D.E. Organization of heuristic teaching of students in the study of functional analysis (on example theme of "The principle of contraction mappings and its application").

Abstract. The article deals with the improvement of methods of teaching functional analysis by providing heuristic activity of students. The basic techniques of control of the activities in the study of the topic " The principle of contracting maps " in the classroom and extracurricular work of students. On the example of the Banach proposed heuristic prescriptions that should be used in the process of proving it. After studying the topics students must complete two integrated laboratory work drawn up on the basis of interdisciplinary communication between functional analysis and computational mathematics and in the implementation of which students establish the dependence of the compression and the rate of convergence of the iterative process.

Keywords: *heuristic activity, functional analysis, the principle of contraction mappings.*