Айвазян Э.И.

Разработка дидактических требований к сложности математических задач, характеризующих обязательные результаты обучения математике

Айвазян Эдвард Ишханович, доктор педагогических наук, доцент Ереванского государственного университета, главный специалист Национального института образования Министерства образования и науки г. Ереван, Республика Армения

Аннотация. Данная работа посвящена всестороннему обсуждению вопросов, связанных с трудностями решений стандартных задач и разработке дидактических требований к их сложности.

Ключевые слова: *трудность решения, логический шаг решения, длина решения, стандартные и нестандартные формы утверждения, логическая и словесно-грамматическая формы утверждения*

Известно, что одной из до сих пор неполноценно решенных методических проблем является недостаток в школьных учебниках математики задач и упражнений, для слабоуспевающих учащеихся, созвучных с их возможностями. В этом вопросе трудности наблюдаются особенно в курсе геометрии. Тем не менее в последнее десятилетие в РА наблюдаются определенные сдвиги в этом направлении. Например, более 40% заданий письменных контрольных и 60% выпускных и вступительных единных тестов по математике должны быть заданиями обязательного уровня. Однако отсутствие системы стандартных заданий по математике иногда дает возможность нарушать и эту пропорцию, хотя уже утверждены и опубликованы предметные стандарты 12-и летней школы РА по математике, которые, однако, не конкретизируют стандартные требования в виде системы типовых задач.

Что касается требований к вложенной в учебники математики системы задач, то именно в этой области традиционно ощущаются трудности при организации дифференцированного и индувидиального обучения, соответственно вышеупомянутыми стандартными требованиями, а в некоторых случаях – и невозможность. Дело в том, что почти все авторы учебников, особенно, геометрии, не столько озабочены обеспечением обязательных требований, сколько исходя из значения – "математика для математики" и игнорировав ее обшеобразовательное значение, заполняют учебники математики в основном направленными на продвинутый уровень интересными, но трудно решаемыми различными задачами. В этом смысле, составляют исключение учебники [2, 3] "Алгебра и элементы математического анализа 9-10 (10-12)" (авторы Г. Геворгян. А. Саакян), система задач которых классифицирована на обязательные для всех учащихся задачи и на задачи, скрепленные специальными значками «$\succ$» и «*», которые представляют желаемые подуровни [4; 6] и учебник [18], где также система задач классифицирована на четыре уровня сложности задач, скрепленные специальными значками.

С психолого-педагогической точки зрения любой метод доказательства, а также ре-шение любой задачи, является системным понятием с многочисленными компонентами.

Нами выявлены элементы каждого метода доказательства, составляющие компоненты решения задачи. Это логическая и словесно-грамматическая структура (форма) задачи; условие задачи и его элементы; требование или заключение задачи и его элементы; решение задачи; метод решения; трудности решения и его компоненты (поиск первого шага решения, поиск каждого последующего шага; количество шагов или длина решения и т.д.) и др. Известно (см. [6, с. 115-116]), что каждое системное понятие, в том числе и метод доказательства, можно применять на разных подуровнях: по образцу (т.е. в аналогичной ситуации), в новой ситуации и в ситуациях, требующих достройки данного понятия новыми понятиями. Например, одно дело применять комплекс умений метода противоречия для решения задачи: "Докажите, что луч **c** не проходит между сторонами угла (ab), если $\angle(ac)=30^0$, $\angle(cb)=40^0, \angle(ab)=60^0$", другое дело применять этот комплекс для решения задач на доказательство "существования и единственности". То есть, речь идет о вложении (применении, осмысливании) одного комплекса (логического "сухого" метода доказательства) в другой комплекс (процесс решения задачи).

Поэтому ***при решении вопроса об усвоении того или иного умения нам необходимо четко ограничиваться не только конкретным уровнем (или подуровнем) усвоения, но и степенью сложности задач, на которых собираемся формировать эти умения или проверять их сформированность.***

Закономерностямы процесса решения «задачи» занимаются как в психолигии О.К. Тихомиров, Л.П. Гурьева, А.Ф. Эсаулов, И.М. Фейгенберг и педагогике – М.Н. Скаткин, В.В. Краевский, Д. Пойа, Ю.М. Колягин, Ю.А. Бурьлев и др., так и в математике – И.Ф. Шаригин, А.М. Абрамов, Г.С. Аракелян и др.

Согласно О.К. Тихомирову, "мышление часто развертывается как процесс решения или разрешения задачи. Задачи эти могут относиться к области природы, общественной жизни или к самому человеку, к его собственному мышлению. Задачи могут возникать по ходу выполнения той или иной практической деятельности или быть преднамеренно (исскуственно – Э.А) созданными: учебные задачи, игровые задачи. И в том и в другом случае задача выступает как объект, как предмет мыслительной работы человека. Как правило, это не отдельный предмет, а целая предметная ситуация. Задача имеет определенную объективную сруктуру, одним из параметров которой является сложность задачи. Особенности структуры задачи влияют (конечно, не однозначно) на деятельность по ее решению, поэтому психологу важно ее учитывать [7; 20]. "Такой учет является составной частью детерминистского анализа мышлении", - отмечает О.К. Тихомиров. Тот факт, что одни задачи решаются человеком легко, а другие (конечно, при прочих равных условиях) трудно, известен достаточно хорошо, но практически пока еще не достаточно выявлены факторы, детерминирующие это различие. Именно поэтому известный психолог А.Р. Лурия отмечал в своих лекциях, что правильное (т. е. – полноценное – Э.А) решение этого вопроса будет очень большим вкладом в психологию мышления [7; 20].

Далее в работе [7] на примере исскуственно составленной задачи рассматриваются вопросы выделения и определения сущности параметров условия и заключения задачи. Так, при характеристике условий, определяющих деятельность по решению задачи, использованы следующие признаки: 1) «Привычность-непривычность» ситуации (напри-мер, от этой характеристики зависит возможность или невозможность достижения жела-емого результата готовым способом). 2) Характер представленности условий (словесное описание, изображение, реальная ситуация). 3) Степень выделенности в ситуации такого «существенного отношения», учет которого является ключевым для решения задачи.

О.К. Тихомиров выделяет ряд параметров условия задачи, какими являются прежде всего ***элементы ситуации*** , т.е. набор дискретных элементов, который как известно состоит из подусловий и области определения квантора всеобщности. Элементы условия могут между собой находиться в различных соотношениях. Эти отношения могут быть, например, пространственными и функциональными [7; 22]. Функциональные отношения автором определяются как допустимые ***правилами преобразования ситуаций*** (напри-мер, в математических задачах, это правила тождественных преобразований, правила эквивалентных преобразований уравнений и неравенств и т.д. – Э.А.).

Известно, что решение задачи часто заключается в выборе определенного элемента среди многих возможностей задачной ситуации и выборе определенного действия с этим элементом. Отсюда и возникает та характеристика задачной ситуации, которая называется **объективной свободой выбора,** т.е. то, из чего может быть сделан выбор [7; там же] (например, в геометрических задачах требуется после подтверждения равенства треугольников отыскать следствия, однако из равенства треугольников следуют многие факты – равенство трех сторон, трех углов, и т.д.– Э.А.). Итак, для достижения конечного результата может потребоваться разное число промежуточных шагов. В процессе осуществления этих промежуточных шагов, ведущих к достижению конечного результата, как справедливо считает О.К. Тихомиров, ситуация может изменяться, поэтому каждый следующий шаг (акт) приходится делать в условиях, отличных от первоначальных. Эти изменения могут быть двух типов: зависимые от решающего или независимые от него. В школьных математических задачах в основном, представлены первый тип изменений, а второй характерен для игр с противником.

Следующий элемент, который выделяет автор, называется **набор тех альтернатив преобразования ситуации, которые в конечном счете приведут к желаемому результату.** Число этих альтернатив, считает О.К. Тихомиров, в принципе может быть равно и нулю (в неразрешимой задаче) или быть практически бесконечным (в т.н. открытой задаче).

"Таким образом, мы видим, что условия задачи имеют многоплановую харак-теристику, которую необходимо учитывать при изучении процессов решения задач. Восприятие, понимание, запоминание условий задачи могут осуществляться с разной легкостью или трудностью, характеризиваться полнотой и адекватностью, вызывать то или иное отношение субъекта, решающего задачу" [7; 24].

Однако в структуру задачи входят не только условия, но и **требования**. В задачах требования чаще всего сформулированы словесно. О.К. Тихомиров выделяет два типа требований. "***В первом случае–это указание на то, какой должна быть ситуация после преобразования исходной. Во втором случае требование относится к получению нового знания в результате ряда операций над условиями"*** [7; 24].

"Задачу характеризуют также соотношения между условиями и требованиями: все элементы условий нужны для решения, есть лишние элементы, отсутствуют необходимые элементы" [7; 25].

Соотношения условий и требований может быть охарактеризовано и по признаку «модальности» их описания. В некоторых задачах школьного курса математики условия задаются в виде изображения, а требования в виде словесной формулировки.

Отметим, что в курсе [8] на примере текстовых задач демонстрируются выше-отмеченные соотношения трех типов между условиями и требованиями задачи.

Значение учета объективной структуры задачи для понимания особенностей ее решения проиллюстрировано в исследованиях Л.П. Гурьевой на материале шахматных задач. Это исследование показало, что, зная сложную структуру задачи, ее условий, можно намеренно варьировать компоненты этой структуры и изучать их влияние на деятельность по решению задачи, анализируя, например, такой сложнейший параметр решения задачи, как «трудность». "Полученные данные говорят о том, что трудность решения задачи человеком создается не только чисто субъективными факторами, хотя, конечно, они играют важную роль (установка, обученность и др.), но и объективными факторами, структурой самой задачи, ее сложностью [7; 26].

Важность учета структуры мыслительной задачи отчетливо выступала также в полемике между двумя известными психологами, изучающими мышление, А.Ф. Эсауловым и К.А. Славской.

Типологией учебных задач занимались многие ученные. Например, Л.И. Фридман [9] выделяет следующие параметры задач: логическая правильность постановки задач, степень их определенности, уровень обобщенности, полнота постановки, сложность, степень проблемности, а И.М. Фейгенберг [7; 27] разработал иную классификацию: задачи с неопределенностью исходных сведений, с неопределенностью в постановке вопроса, с избыточными или ненужными для решения исходными данными, с противоречивыми сведениями в условиях, допускающих лишь вероятностные решения, на обнаружение ошибки в решении и т.д. Некоторые ученые подчеркивают необходимость создания особой науки о задачах – **проблемологии** [10].

Однако наиболее естественным для математики является описание обязательных результатов обучения в виде системы типовых, конкретизирующих эти результаты, задач, так как, во-первых, умение решать задачи традиционно является важным, итоговым, интегральным результатом обучения математике, который традиционно подвергается проверке и оцениванию, в котором актуализируется весь комплекс полученных знаний и умений учащихся, а, во-вторых, предъявление требований к усвоению материала в виде системы типовых заданий исключает возможность их неоднозначной трактовки [11; 15].

Кроме того, с помощью задач легко конкретизировать также уровень трудности применения соответствующих умений.

Для задания обязательных результатов обучения математическим доказательствам в виде системы задач необходимо, имея в виду результаты вышеупомянутых психолого-педагогических исследований, во-первых, разработать требования к сложности этих задач.

Уже было отмечено, что одним из важных элементов математического доказательства является структура доказываемого утверждения. «Вопрос о структуре теоремы – один из важнейших в системе логического воспитания. Несмотря на обширную литературу, в этом вопросе имеются существенные методические недоработки, которые приводят к неумению правильно формулировать теорему, обратную данной, провести доказательство методом от противного, применить необходимые или достаточные условия...» [12; 41].

Сказанное полностью относится также к структуре задачи. В работе [13], в частности, освещен вопрос о роли словеснограмматической формы задачи при выделении ее условий и заключений.

В методике преподавания математики до сих пор не разрешен также вопрос о вза-имной связи логической структуры утверждения и метода ее доказательства.

Как отмечает Н.В.Метельский, «не существует применяемого во всех случаях и никакого универсального метода доказательства»[14; 147].

Анализ практики обучения показывает, что одним из самых трудных моментов обучения доказательствам является выбор целесообразного метода доказательства. Ест-ественно предположить, что существует определенная связь между логической структурой утверждения (теоремы или задачи) и ее целесообразным методом доказательства.

Проведенный нами анализ доказательств теорем и задач, имеющих различные структурные формы, позволил выявить, что в некоторых случаях логическая структура утверждения подсказывает выбор целесообразного метода ее доказательства. Об этом более подробно описано в работе [15].

Богатые возможности естественного (родного) языка позволяют одну и ту же логическую структуру видоизменять различными словесно-грамматическими или словесно-символическими формулировками. Например, перечислим теоремы и задачи, имеющие одну и ту же логическую структуру (1) и различные словесно-грамматические или словесно-символические форулировки:

$$\forall x \in X(A_1(x) \land A_2(x) \to B(x)) \qquad (1)$$

1. Противоположные углы равны.
2. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны.
3. В любом треугольнике против большей стороны лежит большой угол.
4. Два треугольника подобны, если два угла одного из них соответственно равны двум углам другого треугольника.
5. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Доказать, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.
6. Доказать, что ромбы равны, если равны их диагонали и т.д.

Так как овладение обязательными доказательными умениями проверяется и формируется с помощью системы задач, а решение любой задачи начинается с понимания задачной ситуации, выделения условий и требований задачи, выбора метода ее решения и т.д., то одним из важных факторов овладения этими умениями является выбор оптимальной формы предъявления этих задач.

Известно, что самым распространенным видом логических структур математических задач является форма (1). Именно эта форма и является основным структурным видом предъявления стандартных обязательных задач. Кроме того, в отдельных случаях, применяется также форма (1.2), так как значительная часть теорем и задач курса школьной математики имеет именно эту форму:

$$\forall x \in X(A(x) \to B_1(x) \land B_2(x)) \qquad (1)$$

Приведенный нами анализ школьных учебников математики показал, что утверждения типа (1.1) доказываются как прямыми, так и косвенными и другими методами. Выбор того или иного метода доказательства каждого конкретного типа утверждений формы (1.1) осуществляется, исходя из конкретного содержания доказываемого утверждения и (или), чаще всего, также из его логической или словесно-грамматической структуры или из содержания его заключения. Действительно, в рамках констатирующего эксперимента было выявлено, что если заключение утверждения имеет вид «Доказать единственность...», «Доказать, что...не является...», «Доказать, что...не равны (не параллельны)», «Доказать, что... не принадлежит...» и формулировки других типов, в которых присутствует отрицательная частица “не”, то учащиеся в большинстве случаев интуитивно прибегают к “услугам” метода от противного, то есть считают целесообразным применять этот метод. Примерами задач подобного типа являются:

1. Доказать, что ни одна пара углов неравностороннего треугольника не равны.

2. Доказать,что не существует такого числа α, что $\sin\alpha = 0{,}4$ и $\cos\alpha = 0{,}4$

3. Доказать, что трапеция не является паралеллограммом.

Целесообразность применения метода противоречия для доказательства утверждений с подобными формулировками обясняется, в первую очередь, наличием в формулировках их заключений отрицательной частицой “не”, которая на самом деле выполняет роль своеобразного “индикатора”. Во вторых, при доказательствах подобных утверждений методом противоречия несравненно облегчается выбор первого (в целом – трудного) шага доказательства – **отрицания заключения**.

Обычно, как в учебниках алгебры, так и геометрии подобных задач на дока-зательство мало. Поэтому часто учителям самим приходится составлять аналогичные задачи и с их помощью проверять сформированность метода противоречия у учащихся. Ниже приведем пример методического приема для составления аналогичных типовых задач:

Рассмотрим, имеющую форму (1.1), следующую известную теорему:

«Вертикальные углы равны». (1)

Сначала передадим ей стандартную формулировку - «Если..., то...»:

«Если два угла вертикальны, то они равны». (2)

Затем составим обратно-противоположное утверждение теоремы (2):

«Если два угла не равны, то они не вертикальны»: (3)

Очевидно, что исходя из вышеизложенных методических указаний теорему (3) целесообразно доказать методом противоречия. Это объясняется не только наличием в заключении утверждения (3) отрицательной частицы “не”, но и простотой доказательства. Тем не менее формулировка утверждения (3) и его доказательство имеют чисто дидактическую значимость и полезно эту методику чаще применять как для формирования метода противоречия, так и для проверки его сформированности.

Анализ школьных учебников показал, что целесообразно применять метод исключения в тех случаях, когда теорема сформулирована в виде не отрицательного, а утвердительного утверждения и является обратной теоремой ранее доказанной некоторой прямой теоремы. Например, в учебнике [6] методом исключения доказано обратное утверждение следующей теоремы.

1) «В треугольнике против большей стороны лежит больший угол».

2) «В треугольнике против большего угла лежит большая сторона» [16; 76].

Первая (прямая) теорема в этом учебнике доказана синтетическим методом, а вторая (обратная) теорема – методом исключения, в процессе доказательства которой дважды применен метод противоречия.

Кроме того, метод противоречия является основным при доказательствах теорем единственности. Причем, единственным известным нам исключением из сказанного является доказательство теоремы 10.1 (единственность параллельного переноса) учебника А.В. Погорелова, которое осуществлено синтетическим методом и по мнению многих специалистов является трудно доступным для большинства учащихся [15].

Таким образом, первым важным фактором конкретизации стандартных обязательных результатов обучения методам доказательств в виде задач является формулирование этих задач определенным образом (выбор логической и словесно-грамматической формы задачи), т.е. эти задачи в основном должны иметь логические структуры (1) и (2), в стандартной словесно-грамматической формулировке.

Вторым важным фактором является ***фактор шага.*** Под этим понимается количество логических шагов (операций), необходимых для решения задачи (для построения цепочки умозаключений), т.е. длина этой цепочки умозаключений. Среди задач одинаковой структуры сложность решения существенно зависит от продолжительности, т.е. от **длины решения**. Поэтому при планировании обязательных результатов обучения необходимо выделять оптимальное количество шагов, т.е. ограничить длину решения задач сверху.

В работе [17] с помощью анализа работ [11; 14-17] и др. было выявлено, что подавляющее большинство обязательных для всех учащихся задач на доказательство имеют решение длиной 2-4 логического шага [17; 90].

Исходя из этих данных и из того факта, что этим требованиям удовлетворяет также подавляющее большинство задач на доказательство государственного предметного стандарта по математике среднего образования РА, а также задачи, заложенные в действующие учебники по математике, было решено, что ***конкретизацией обязательных (стандартных) результатов обучения являются задачи, решение которых содержит не более 3-4 логических шагов. При этом для проверки овладения методом противоречия следует ограничиваться задачами, формулировка которых задает необходимость использования конструкции противоречия, а для доказательства наличия противоречия требуется применение 1-2 логических шагов.***

ЛИТЕРАТУРА (REFENCES TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Айвазян Э.И., Набор умений составляющих обязательные результаты обучения математическим доказательствам.« Математика в высщей школе», на арм. языке, сборник научно-методических статьей. Прак 4 (ЦОР МОиН РА, АГПУ им. Х. Абовяна, АГПУ), -Е., 2003, стр.66-71.
Ayvazyan E.I., Nabor umeniy sostavlyayushchikh obyazatel'nyye rezul'taty obucheniya matematicheskim dokazatel'stvam.« Matematika v vysshchey shkole», na arm. yazyke, sbornik nauchno-metodicheskikh stat'yey. Prak 4 (TSOR MOiN RA, AGPU im. K.H. Abovyana, AGPU), -Ye., 2003, str.66-71.
2. Геворгян Г.Г., Саакян А.А., « Алгебра и элементы математического анализа 9,10», -Е., 2001.
Gevorgyan G.G., Saakyan A.A., « Algebra i elementy matematicheskogo analiza 9,10», -Ye., 2001.
3. Геворгян Г.Г., Саакян А.А., «Алгебра и элементы математического анализа 10,11,12», для общих и гумманитарних потоков. -Е., «Эдить Принт», 2009-2011.
Gevorgyan G.G., Saakyan A.A., «Algebra i elementy matematicheskogo analiza 10,11,12», dlya obshchikh i gummanitarnikh potokov. -Ye., «Edit' Print», 2009-2011.
4. Геворгян Г.Г.,Саакян А.А.,«Алгебра и элементы математического анализа10, 11,12»,для естественно-математических потоков,-Е.,«Тигран Мец», 2009-2011.
Gevorgyan G.G.,Saakyan A.A.,«Algebra i elementy matematicheskogo analiza10, 11,12»,dlya yestestvenno-matematicheskikh potokov,-Ye.,«Tigran Mets», 2009-2011.
5. Айвазян Э.И., «Алгебра и элементы математического анализа. Методическое пособие для учителя», -Е., «Эдит Принт», 2001, 88 с.
Ayvazyan E.I., «Algebra i elementy matematicheskogo analiza. Metodicheskoye posobiye dlya uchitelya», -Ye., «Edit Print», 2001, 88 s.
6. Скаткин М.Н., Краевский В.В., Качество знаний учащихся и пути его совершенствования, -М., "Просвещение", 1978, -208 с.
Skatkin M.N., Krayevskiy V.V., Kachestvo znaniy uchashchikhsya i puti yego sovershenstvovaniya, -M., "Prosveshcheniye", 1978, -208 s.
7. Тихомиров О.К., Психология мышления. –М., "Изд-во МГУ", 1984, -230 с.
Tikhomirov O.K., Psikhologiya myshleniya. –M., "Izd-vo MGU", 1984, -230s.
8. Микаелян Г.С., «Алгебра-8»,-Е., «Гай Эдит», 1999, -303 с.
Mikayelyan G.S., «Algebra-8»,-Ye., «Gay Edit», 1999, -303 s.
9. Фридман Л.М., Логико-психологический анализ школьных учебных задач. –М., 1977, -207с.
Fridman L.M., Logiko-psikhologicheskiy analiz shkol'nykh uchebnykh zadach. –M., 1977, -207s.
10. Человек и вычислительная техника.Под ред.В.М. Глушкова. Киев, 1970, -207с.
Chelovek i vychislitel'naya tekhnika.Pod red.V.M.Glushkova. Kiyev, 1970, -207s.
11. Кузнецова Л.В., Решетников Н.Н., Фирсов В.В., Обязательные результаты обучения. –"Математика в школе", И 2,1985, стр. 14-17.
Kuznetsova L.V., Reshetnikov N.N., Firsov V.V., Obyazatel'nyye rezul'taty obucheniya. –"Matematika v shkole", I 2,1985, str. 14-17.
12. Болтянский В.Г., Как устроена теорема. –"Математика в школе", 1, 1973, -стр. 41-49.
Boltyanskiy V.G., Kak ustroyena teorema. –"Matematika v shkole", 1, 1973, -str. 41-49.
13. Айвазян Э.И., Роль словесно-грамматической и логической формы утверждения в процессе выбора целесообразного метода доказательства."Вектор науки ТГУ" (Тольятти, Россия), Научно-методический журнал, И1, 2013, стр. 289-292.
Ayvazyan E.I., Rol' slovesno-grammaticheskoy i logicheskoy formy utverzhdeniya v protsesse vybora tselesoobraznogo metoda dokazatel'stva."Vektor nauki TGU" (Tol'yatti, Rossiya), Nauchno-metodicheskiy zhurnal, I1, 2013, str. 289-292.
14. Метельский Н.В., "Дидактика математики", -Минск., изд-во БГУ, 1982, -256 с.
Metel'skiy N.V., "Didaktika matematiki", -Minsk., izd-vo BGU, 1982, -256 s.
15. Айвазян Э.И., О выборе метода доказательства. « Математика в шкле », 1998, 3, с. 9-16.
Ayvazyan E.I., O vybore metoda dokazatel'stva. « Matematika v shkle », 1998, 3, s. 9-16.
16. Атанасян Л.С. и др., «Геометрия 6», - Е., «Астхик 59», 2000, 127 с.
Atanasyan L.S. i dr., «Geometriya 6», - Ye., «Astkhik 59», 2000, 127 s.
17. Айвазян Э.И.,«Методологические основы обучения математическим доказательствам», -Е., 2013, -306 с.
Ayvazyan E.I.,«Metodologicheskiye osnovy obucheniya matematicheskim dokazatel'stvam», -Ye., 2013, -306 s.
18. Бурда М.И., Тарасенкова Н.А., «Геометрия-8»: Киев, «Освита», 2011.
Burda M.I., Tarasenkova N.A., «Geometriya-8»: Kiyev, «Osvita», 2011.

Ayvazyan E.I. Working out Didactic Requirements to the Problems Complicity Characterizing Compulsory Results of Learning Mathematics

Abstract. The article is devoted to the overall discussion of the problems related to the difficulty in solving standard problems and the requirements to their complicity.

Keywords*: difficulty in solving, a logical step to solving, length of solving, standard and non-standard forms of confirmation, logical and wording-grammatical means of confirmation*