

## PEDAGOGY

*Амброзяк О.В.*

### Використання евристичних прийомів на етапах закріплення та застосування геометричних понять

*Амброзяк Ольга Валеріївна, аспірант*

*Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, м. Черкаси, Україна*

**Анотація.** Розглянуто систему завдань та евристичних прийомів для їх виконання, спрямованої на формування геометричних понять. Зроблено акцент на вправах, які використовуються на етапі закріплення та застосування понять. Дібрано евристичні прийоми, які найбільш доцільно застосовувати для виконання завдань кожного з семи типів завдань. Автор наводить приклади завдань та способів їх виконання з обґрунтуванням їх вибору. Зроблено акцент на використанні відразу декількох евристичних прийомів для всебічного та глибоко дослідження об'єктів та формування понять про них.

**Ключові слова:** методика навчання математики, евристика, геометрія, поняття, евристичний прийом

**Постановка проблеми.** Широке впровадження ІКТ у навчальний процес та зміна пріоритетів освіти обумовлює створення освітніх продуктів для учнів, що спроможні допомогти у цікавому, а головне, у легкому, оволодінні знаннями. Оскільки в основі будь-якої науки лежать поняття, цілком зрозуміло, що основна увага має бути спрямована на вдосконалення системи їх формування як запоруки успішного оволодіння предметом. Засвоєння учнями геометричних понять є важливим не лише з точки зору необхідності вивчення шкільного предмета, але й з погляду на те, що вони лежать в основі розуміння об'єктів, які оточують людину у повсякденному житті, що зумовлено характером самої геометрії як науки. У зв'язку з цим проблема удосконалення системи формування геометричних понять виступає на перший план. Потужним інструментом у вирішенні цього питання виступає система евристичного навчання математики, яка дозволяє більш широко і творчо досліджувати поняття. Зрозуміло, що як і будь-яка система вона має цілі, зміст, форми, методи та засоби, єдність яких обумовлює якісне навчання. При цьому особливу увагу при формуванні геометричних понять у рамках евристичного навчання слід приділити саме змісту та методам навчання, тобто системі завдань та евристичних прийомів, які спрямовані на їх виконання.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Останнім часом науковці активно досліджують та впроваджують евристичні підходи до навчання різних наук як інструменту, що здатен розвивати дослідницькі якості учнів. Можливості використання евристичних прийомів при вивченні геометрії розглядали К. Влащенко, І. Гончарова, Т. Жукова, І. Зільберберг, М. Єрохіна, Ю. Кулюткін, Г. Саранцев, О. Скафа, Ю. Сморжевський С. Муггалімова, та інші. При цьому у дослідженнях майже не розглядається специфіка вправ, які доцільно застосовувати для здійснення евристичної діяльності під час формування геометричних понять, а тому не виділено основні прийоми, які використовуються для цієї діяльності.

**Мета статті.** Мета статті полягає в розкритті особливостей вибору завдань, які доцільно використовувати на останніх етапах формування геометричних понять, тобто під час закріплення та застосування в умовах організації евристичної діяльності учнів.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Як відомо, основний зміст понять розкривається через його означення, але лише знання останнього не забезпечує повного розуміння та формування поняття, адже разом з основним змістом учні мають опанувати і розширений зміст поняття, тобто його основні властивості та ознаки. Згідно з етапами формування понять [3] саме на етапі закріплення та застосування відбувається включення нового поняття в систему вже відомих та його всебічне дослідження.

Раніше нами наголошувалося на доцільності та необхідності використання евристичного навчання математики під час формування геометричних понять та зазначались евристичні прийоми [1, 2], які застосовуються при цьому. Розглянемо особливості формування геометричних понять з точки зору засвоєння розширеного змісту в умовах здійснення евристичної діяльності учнів.

На всіх етапах формування геометричних понять [3] використовуємо систему завдань для керування евристичною діяльністю учнів у процесі організації роботи з формування поняття, що розроблена О. Скафою [3]. Дамо детальну характеристику кожного виду вправ, які впроваджуються на етапах закріплення та застосування.

Третій етап процесу формування геометричних понять – закріплення, передбачає відпрацювання навичок використання поняття при розв'язуванні найпростіших задач. Мета цього етапу полягає в усвідомленні кожної істотної властивості, визначенні на їх основі властивостей та ознак поняття, ознайомленні з процесом пізнання, занурення учнів у процес дослідження та отримання власної освітньої продукції. Порівняно з традиційною методикою формування понять, в якій на цьому етапі важливими є самі висновки, тобто властивості та ознаки, у системі евристичного навчання більшої значимості набуває процес розв'язання евристичної задачі, процес пізнання та дослідження, а вже потім отримані результати. Таке явище обумовлено тим, що оволодівши евристичними прийомами, які використовуються на цьому етапі, учні мають змогу самостійно досліджувати наступні поняття, що в результаті приводить до отримання нових відомостей та знань. У зв'язку з цим для успішного проходження цього етапу учні повинні володіти основними евристичними прийомами, вільно спілкувати-

ся, не боятися висувати гіпотези та творчо підходити до поставленої проблеми.

Так, на етапі закріплення геометричних понять передбачається використання вправ використовуємо вправи 3-х типів.

1. Вправи на розпізнавання об'єктів, що належать обсягові поняття. Загалом завдання цього типу сприяють закріпленню властивостей, отриманих при ранішому ознайомленні з поняттями та вмінням знаходити потрібні геометричні фігури на рисунку.

Найбільш ефективними є евристичні прийоми "переформулою", "моделью", "нарисуй картинку", "метод малих змін", "аналізуй", "розглянь граничні випадки", "досліджуй частинами".

Зокрема, при формуванні поняття "Паралельні прямі у просторі" доцільно запропонувати учням таке завдання: "Серед наведених рисунків оберіть ті, на яких всі вказані прямі паралельні" (рис. 1.).

Завдання спрямоване на закріплення означення паралельних прямих, а саме їх основних істотних ознак: прямі не мають спільних точок та прямі лежать в одній площині. У випадку трьох прямих, учні мають розглянути кожну пару окремо та зробити висновок. Важливо, щоб учні не плутали істотну ознаку – прямі лежать в одній площині та наслідок – паралельні прямі утворюють площину. Зокрема, на рисунку б) вказані прямі можуть утворювати площину, але при цьому не є паралельними, оскільки лежать в різних площинах, а при паралельному перенесенні в одну площину будуть перетинатися. Завдання дає змогу учням ознайомитися з можливими розташуваннями паралельних прямих у многогранниках, що є підготовчим етапом для їх подальшого вивчення в 11 класі.

Евристичні підказки можуть бути такими:

1) сформулюйте означення паралельних прямих у просторі; 2) проаналізуйте, чи лежать прямі в одній площині; 3) проаналізуйте вказані прямі на наявність спільних точок.

До цього типу слід включити не лише завдання, які передбачають вибір фігури на запропонованих рисунках, але і завдання, які передбачають дослідження об'єктів та перевірку їх приналежності до поняття. Наприклад, під час формування поняття перпендикулярних прямих в 7 класі на етапі закріплення можна запропонувати таке завдання: "Прикладаючи косинець то одним, то іншим боком, учень через точку А провів два перпендикуляри до прямої а. Зробіть висновок про косинець та побудову".

Для виконання завдання учню варто використовувати евристичні прийоми "переформулою" та "розмірковуй від супротивного". Загалом, вправа має практичне значення, оскільки дозволяє учням засвоїти ще одну галузь застосування перпендикулярних прямих та перпендикуляра, запам'ятати галузь застосування креслярського косинця. Тобто, раніше після вивчення видів кутів, школярі розуміли, що косинець використовують для побудови прямого кута, то тепер з'являється ще одне застосування – для побудови та перевірки перпендикулярності прямих, відрізків. Спершу школярам необхідно переформулювати умову задачі, замінивши косинець на сукупність відрізків та точок для того, щоб мати змогу прийти до необхідності працювати з перпендикуляром та прямим кутом.

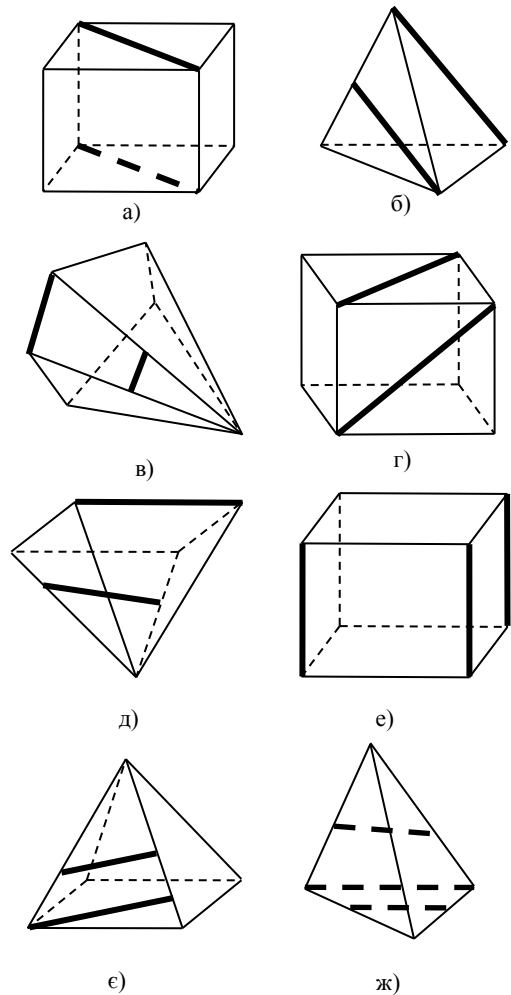


Рис. 1. Завдання для формування поняття "Паралельні прямі у просторі"

Учні мають отримати висновок, що косинець виготовлений неправильно, оскільки правильний косинець дає змогу побудувати прямий кут, а як відомо з раніше розглянутих завдань, не можливим є існування двох різних прямих кутів. Отже, якщо в задачі отримано два різних перпендикуляри через одну й ту ж точку поза прямою, то робимо висновок, що проведено два різних прямих кути зі спільною точкою на двох сторонах та двома доповняльними променями, що є їх іншими сторонами. Зрозуміло, що така побудова можлива лише у випадку, якщо вершини куті співпадають, звідки випливає, що перпендикуляр єдиний. а це суперечить умові.

Вчителів слід використовувати такі евристичні підказки: 1) переформулюйте умову задачі; 2) використайте міркування від супротивного; 3) розгляньте кути, утворені перпендикулярами; 4) використайте задачу про існування двох різних за величиною прямих кутів; 5) зробіть висновок про побудову та креслярського косинця.

2. Вправи на виділення наслідків із визначення та означення поняття.

Основна мета вправ цього типу полягає у розвитку вміння робити припущення, перевіряти та спростовувати гіпотези, відкривати в результаті дослідження нові властивості понять, їх ознаки.

Основними евристичними прийомами для виконання завдань цього типу є "аналізуй", "порівняй", "розмірковуй від супротивного", "досліджуй частинами". Слід зазначити, що найчастіше для виконання цих завдань учням доводиться застосовувати відразу кілька евристичних прийомів, комбінувати їх для отримання результату.

Наприклад, в 7 класі учням для закріплення поняття паралельних прямих слід запропонувати завдання: *"Пряма с перетинає одну з двох паралельних прямих. Визначте взаємне розміщення прямої с та іншої прямої з пари паралельних"*. Зрозуміло, що для виконання завдання учням знадобиться використати одночасно два прийоми "досліджуй частинами" та "розмірковуй від супротивного". Таким чином, учні не лише виконують завдання, працюють над виробленням вміння користуватися евристичними прийомами, але і на основі означення паралельних прямих формулюють властивість: якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, вона перетинає і іншу.

Водночас, сучасні засоби навчання дають змогу отримувати знання (властивості понять) без використання складних дедуктивних міркувань на основі спостережень, моделювання в електронних засобах динамічної геометрії та прийому "індукція". Так, учням під час формування поняття бісектриси можна запропонувати завдання: *"Дослідіть бісектриси рівнобедреного трикутника"*. В результаті учні отримують відразу декілька властивостей бісектрис рівнобедреного трикутника: бісектриси, проведеної з вершини; бісектрис кутів при основі; про точку перетину бісектрис трикутника.

3. Вправи на доповнення умов (розпізнавання і виведення наслідків) та вправи на виведення наслідків із належності об'єктів поняттю. Завдання, які доцільно використовувати мають бути спрямованими на виявлення та глибоке розуміння понять і всіх елементів, що входять до їх складу. Результатом розв'язання має стати певна властивість чи ознака, взаємозв'язок між різними поняттями та наслідки з них.

Основними евристичними прийомами, які найчастіше використовуються є "аналізуй", "розмірковуй від супротивного", "переформулуй", "розбий на підзадачі", "розглянь граничні випадки", "виведення наслідків", "введи ефективну систему позначень", "досліджуй частинами".

Наступний четвертий етап формування геометричних понять – застосування, полягає у встановленні зв'язків досліджуваного поняття з іншими поняттями. Для реалізації зазначеного доцільними вважаємо вправи трьох типів:

1. Вправи на складання родоводу поняття.

Ці вправи передбачають складання класифікаційних схем, встановлення зв'язків нового поняття з раніше вивченими. Особливу увагу слід приділити завданням на переформулювання означень та складання евристичних орієнтирів для побудови певної фігури, що відповідає поняттю чи знаходження певної числової характеристики поняття. Для виконання описаних завдань найбільш доцільно використовувати евристичні прийоми "аналіз", "переформулуй", "моделювання", "узагальнення", "розмірковуй від супротивного".

Наведемо приклад вправи на переформулювання означення суміжних кутів: *"Сформулюйте означення суміжних кутів, використовуючи при цьому тільки поняття "точка", "промені"*. Виконання завдання дає учням змогу актуалізувати поняття суміжних кутів, повторити всі істотні властивості та виконати поступове розчленування його на складові, які є не означуваними поняттями геометрії. Внаслідок такої діяльності учні мають усвідомити, що поняття суміжного кута є похідним від поняття кута, який в свою чергу є похідним від поняття променів, а останні від понять пряма та точка. Таким чином, школярі спостерігають спіральність шкільного курсу геометрії, тому на підвідомому рівні готові до того, що наступні поняття будуть вводитися подібним чином і уявлятимуть собою композицією вже відомим фігур.

Роботу з означенням цього ж поняття, що спрямована на встановлення взаємозв'язку між поняттями можна продовжити завданням: *"Сформулюйте означення суміжних кутів, яке починатиметься "Суміжні кути – це фігура, яка ..."*. Виконання такого роду завдань спираються на використання прийомів "аналіз" та "переформулювання" та дозволяють учням визначити місце суміжних кутів у системі понять, що раніше вивчалися, закріпити знання про істотні ознаки поняття. Крім того, учні мають змогу узагальнити отримані відомості та властивості і втілити їх у новому означенні, причому тоді вони мають розуміти, що останні вже не треба буде доводити. Учні можуть запропонувати наступні продовження: 1) "... яка складається з двох кутів: гострого і тупого або двох прямих кутів, які мають спільну вершину та спільну сторону, а в сумі становлять  $180^\circ$  або 2) "... яка утворена внаслідок розбиття розгорнутого кута на дві частини". Відповідно для досягнення результатів учнів потрібно забезпечити системою підказок та евристичних орієнтирів, які можуть бути такими: 1) використовуйте рисунок суміжних кутів; 2) використовуйте спосіб побудови суміжних кутів; 3) зверніть увагу на види кутів, які входять до складу суміжних кутів.

2. Вправи на застосування поняття в різних ситуаціях. Загалом завдання спрямовані на висвітлення можливих застосувань понять у практичній діяльності та під час побудови інших понять. Так, більшість завдань націлені на відшукання залежностей та способів відшукання метричних величин одних понять через поняття, що вивчається. Найбільш часто використовуються до розв'язання таких завдань евристичні прийоми "аналіз", "порівняння", "моделювання", "нарисуй рисунок", "абстрагування", "метод малих змін", "допоміжна побудова" та інші.

3. Вправи на систематизацію поняття.

У цьому блоці корисно використовувати завдання спрямовані на побудову класифікаційних схем, таблиць-помічників, евристичних орієнтирів для побудови об'єктів. На цьому етапі учні вже володіють необхідною кількістю інформації про поняття, тому можуть вільно використовувати його у комплексі з іншими. Як і у попередніх завданнях, розгляд поняття у системі з іншими може висвітлити нові закономірності та одиничні властивості, які виконуються лише за певних умов. Загалом доцільно використовувати евристичні прийоми "аналізуй", "систематизуй", "уза-

гальної", "досліджуй частинами", "розглянь кілька моделей задачі", шукай контрприклад та інші.

Наприклад, під час систематизації поняття відрізка можна запропонувати учням завдання: "Встановіть взаємне розміщення двох відрізків, якщо відомо, що вони не мають спільних точок". Завдання спрямоване на визначення дітьми взаємного розміщення двох відрізків. Учні мають прийти до висновку, що два відрізки можуть не перетинатися, але не лежати на одній прямій; не перетинатися але лежати на одній прямій; бути паралельними. Варто, щоб учні отримані результати учні записали у таблицю. Корисно провести аналогію із взаємним розміщенням прямих. Для допомоги учням з різним рівнем навчальних досягнень вчитель може запропонувати такі евристичні підказки: 1) встановіть, чи можуть відрізки лежати на одній прямій; 2) встановіть, чи можуть відрізки лежати на прямих, що перетинаються; 3) встановіть, чи можуть відрізки лежати на прямих, що не перетинаються; 4) розгляньте всі можливі розташування прямих та відрізків на них.

Водночас, завдання на систематизацію можуть бути спрямованими і на відшукання необхідних і достатніх умов для існування того чи іншого поняття. Так, під час формування поняття суміжних кутів розглядаємо завдання: "Відомо, що сума двох кутів зі спільною вершиною та спільною стороною становить  $180^\circ$ . Встановіть вид цих кутів (чи утворюються при цьому суміжні кути)". В результаті учні мають оволодіти

прийомом "шукай контрприклад", зокрема визнати, що для спростування твердження досить навести хоча б один приклад, який підтверджує невиконання умов. Зрозуміло, що для більш ефективного та швидкого розв'язання слід виконати попередню роботу з учнями з приводу розміщення кутів, які мають спільні елементи. Отже, внаслідок виконання завдання учні мають запам'ятати, що сума кутів зі спільною стороною і спільною вершиною у  $180^\circ$  є необхідною але не достатньою умовою для того, щоб кути були суміжними. Евристичні підказки слід запропонувати такі: 1) встановіть, чи можуть кути бути суміжними; 2) розгляньте всі можливі розміщення двох кутів зі спільною вершиною та спільною стороною; 3) встановіть, чи може сума двох несуміжних кутів становити  $180^\circ$ ; 4) зробіть рисунок можливих моделей; 5) зробіть висновок.

**Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямку.** Підкреслимо, що для організації евристичної діяльності учнів щодо формування геометричних понять не достатньо лише застосовувати евристики, а необхідно розробити евристично спрямовану систему вправ. Наведені основні завдання та евристичні прийоми для їх виконання, що спрямовані на формування понять в шкільному курсі геометрії мають стати орієнтиром для створення змісту системи евристичного навчання геометрії.

#### ЛІТЕРАТУРА (REFERENCES TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Амброзяк О.В. Роль евристичних прийомів у формуванні геометричних понять основної школи / О.В. Амброзяк // Проблеми сучасної педагогічної освіти. Сер.: Педагогіка і психологія. – 36. статей: – Ялта: РВВ КГУ, 2013. – Вип. 41. – Ч. 6. – С. 18–26.  
*Ambrozyak O.V. Rol' evry'sty'chny'x pry'jomiv u formuvanni geometry'chny'x ponyat' osnovnoyi shkoly' [The role of the heuristic techniques in the formation of geometrical concepts to students of in middle school] / O.V. Ambrozyak // Problemy' suchasnoyi pedagogichnoyi osvity'. Ser.: Pedagogika i psy'xologiya. – Zb. statej: – Yalta: RVV KGU, 2013. – Vy'p. 41. – Ch. 6. – S. 18–26.*
2. Амброзяк О.В. Роль евристичних прийомів у формуванні стереометричних понять в учнів старшої школи / О.В. Амброзяк // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, I(7), Issue: 14, 2013. – С. 72–76.

*Ambrozyak O.V. Rol' evry'sty'chny'x pry'jomiv u formuvanni stereometry'chny'x ponyat' v uchniv starshoyi shkoly' [The role of the heuristic techniques in the formation of stereometrical concepts to students of in high school] / O. V. Ambrozyak // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, I(7), Issue: 14, 2013. – S. 72–76.*

3. Скафа О.І. Методичні складові етапів формування понять у евристичному навчанні математики / О.І. Скафа // Математика в школі, 2004. – № 1. – С. 18-25.  
*Skafa O.I. Metody'chni skladovi etapiv formuvannya ponyat' u evry'sty'chnomu navchanni matematy'ky' [Methodological stages the formation of concepts in heuristic learning of mathematics] / O.I. Skafa // Matematy'ka v shkoli, 2004. – № 1. – S. 18-25.*

#### **Ambrozyak O.V. Using heuristic techniques in steps of applying and using of geometric concepts**

**Abstract.** The article is devoted to the system of tasks and heuristic methods for their solving, aimed at the formation of geometric concepts. Made accent on the exercises used in the stages of applying and using of the concepts. Chosen heuristic techniques that are most appropriate to apply to the decision of each of the seven types of jobs. The author gives examples of tasks and ways to address them with the justification for this choice. Made emphasis on the use of several heuristic techniques, allowing more deeply and comprehensively examine the objects and concepts that describe them.

**Keywords:** methodology of teaching mathematics, heuristic, geometry, the concept, heuristic techniques

#### **Амброзяк О.В.**

#### **Использование эвристических приёмов на этапах закрепления и применения геометрических понятий**

**Аннотация.** Статья посвящена рассмотрению системы заданий и эвристических приемов для их использования, направленной на формирование геометрических понятий. Сделано акцент на упражнениях, используемых на этапах закрепления и применения понятий. Подобрано эвристические приёмы, которые наиболее целесообразно применять для решения каждого из семи типов заданий. Автор приводит примеры заданий и способов их решения с обоснованием такого выбора. Сделано акцент на использовании сразу нескольких эвристических приемов, что дает возможность более глубоко и всесторонне исследовать объекты и понятия, которые их описывают.

**Ключевые слова:** методика обучения математике, эвристика, геометрия, понятия, эвристический приём